代数II　小テスト　2017–11–21

答えと簡単な解説

[問1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ． ただし，L/K を体の拡大，$\alpha \in L$ とし，写像

$$\varphi : K[X] \longrightarrow L, \qquad g(X) \mapsto g(\alpha)$$

を考える．

(○) 写像 φ は（可換環の）準同型写像である．
【解説】 $g(X), h(X) \in K[X]$ ならば，$\varphi(g(X)h(X)) = g(\alpha)h(\alpha) = \varphi(g(X))\varphi(h(X))$.

(○) $\dfrac{1}{\alpha^2+1} \in \operatorname{Im}\varphi$ ならば，α は K 上代数的である．
【解説】 $\dfrac{1}{\alpha^2+1} = \varphi(h(X)) = h(\alpha)$ をみたす $h(X) \in K[X]$ がとれるから，$g(X) = (X^2+1)h(X)-1$ とおけば，$g(\alpha) = (\alpha^2+1)h(\alpha)-1 = 0$.

(×) α が K 上超越的ならば，$\operatorname{Im}\varphi$ は体である．
【解説】 もし体ならば $1/\alpha \in \operatorname{Im}\varphi$ であり，前問と同様にして，α は K 上代数的.

(×) $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ ならば，α は K 上代数的である．
【解説】 $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ より，$g(\alpha) = 0$ となる K 上の多項式 $g(X)$ は（零多項式の他に）存在しない．

(○) α が K 上代数的で，$f(X)$ が α の K 上の最小多項式ならば，$\operatorname{Ker}\varphi = (f(X))$ が成り立つ．
【解説】 $f(\alpha) = 0$ より $f(X) \in \operatorname{Ker}\varphi$． さらに $f(X)$ は K 上既約だから $(f(X))$ は極大イデアル． よって $(f(X)) = \operatorname{Ker}\varphi$.

(×) $f(\alpha) = 0$ をみたす K 上の任意の多項式 $f(X)$ に対して，体 $K(\alpha)$ は剰余環 $K[X]/(f(X))$ と同型である．
【解説】 $f(X)$ が K 上既約でないと，$K[X]/(f(X))$ は体ではない．

(×) $\mathbb{R}$ 上の任意の 3 次多項式 $f(X)$ に対して，剰余環 $\mathbb{R}[X]/(f(X))$ は体である．
【解説】 3 次多項式 $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ は必ず実根をもつから，それを $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると $X-\alpha$ は $f(X)$ の因子である． よって $f(X)$ は $\mathbb{R}$ 上既約ではない．

(○) $\mathbb{C}$ は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ と同型である．

【解説】 $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{C},\ g(X) \mapsto g(\sqrt{-1})$ は全射準同型で核は (X^2+1).

(×) $\mathbb{C}$ は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2+X+3)$ とは同型ではない．

【解説】 α を X^2+X+3 の根のひとつとする（具体的には，たとえば $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{-11}}{2}$ であるとしてよい）．このとき，写像 $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$, $g(X) \mapsto g(\alpha)$ が全射準同型で核が (X^2+X+3) であることが（少しめんどうだけど）確かめられる．

[問 2] α を X^3-X-1 の根とするとき，$\dfrac{3\alpha-2}{\alpha^{10}} = a+b\alpha+c\alpha^2$ をみたす有理数 a,b,c を定めよ．

【解説】 $3\alpha-2=\alpha^{10}(a+b\alpha+c\alpha^2)$ の右辺を，$\alpha^3=\alpha+1$ を使って変形する．とは言っても，べきが大きいので α^k の単項式を順に計算する方が良いかもしれない．

$$\begin{aligned}
\alpha^{10} &= \alpha\left(\alpha^3\right)^3 = \alpha\,(\alpha+1)^3 = \alpha\left(\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1\right)\\
&= \alpha^4+3\alpha^3+3\alpha^2+\alpha = \left(\alpha^2+\alpha\right)+3\,(\alpha+1)+3\alpha^2+\alpha\\
&= 4\alpha^2+5\alpha+3\\
\alpha^{11} &= \alpha\left(4\alpha^2+5\alpha+3\right) = 4\alpha^3+5\alpha^2+3\alpha = 4(\alpha+1)+5\alpha^2+3\alpha\\
&= 5\alpha^2+7\alpha+4\\
\alpha^{12} &= \alpha\left(5\alpha^2+7\alpha+4\right) = 5\alpha^3+7\alpha^2+4\alpha = 5(\alpha+1)+7\alpha^2+4\alpha\\
&= 7\alpha^2+9\alpha+5
\end{aligned}$$

よって，$3\alpha+2 = a\,(4\alpha^2+5\alpha+3)+b\,(5\alpha^2+7\alpha+4)+c\,(7\alpha^2+9\alpha+5)$ の辺々を比較して

$$4a+5b+7c=0,\quad 5a+7b+9c=3,\quad 3a+4b+5c=2$$

これらを連立させて $\boxed{a=-1,\ \ b=5,\ \ c=-3}$.