代数II　小テスト　2018–12–19

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．ただし，$\overline{K}$ は 体 K の代数的閉包であり，$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とする．

(○) $\alpha \in \overline{K}$ が K 上分離的で，さらに $\beta \in \overline{K}$ が α と K 上共役ならば，β も K 上分離的である．
【解説】　α, β の K 上の最小多項式は同じ．

(×) 標数が 10 である体が存在する．
【解説】　体の標数は 0 または素数である．

(○) $X^3 + X + 1$ は $\mathbb{F}_2$ 上既約である．
【解説】　3 次式なので，$\mathbb{F}_2$ 上可約であるためには $\mathbb{F}_2$ に根をもつことが必要十分であるが，$0, 1 \in \mathbb{F}_2$ はどちらも根ではないので，$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ に根をもたない．

(×) $X^3 + X + 1$ は $\mathbb{F}_3$ 上既約である．
【解説】　前問と同様に考える．$\mathbb{F}_3$ において $1^3 + 1 + 1 = 0$ より，$1 \in \mathbb{F}_3$ は根である．

(○) $X^2 - 3$ は $\mathbb{F}_5$ 上既約である．
【解説】　前問，前々問と同様に考える．3 は 5 を法として平方非剰余だから，$\mathbb{F}_5$ の任意の元は $X^2 - 3$ の根ではない．

(×) 元の個数が 10 である体が存在する．
【解説】　存在すると仮定して，それを K とすると，K の標数 p は素数である．このとき $\mathbb{F}_p \subset K$ と考えてよいが，10 は素数ではないので $\mathbb{F}_p \neq K$，よって $\alpha \notin \mathbb{F}_p$ をみたす $\alpha \in K$ がとれる．そこで，$n = [\mathbb{F}_p(\alpha) : \mathbb{F}_p]$ とすれば $n \geq 2$．一方，ベクトル空間として $\mathbb{F}_p(\alpha)$ は $\mathbb{F}_p$ 上 n 次元，したがって $\mathbb{F}_p^n$ と線形同型である．よって $|\mathbb{F}_p(\alpha)| = |\mathbb{F}_p|^n = p^n$．さらに，加法群として $\mathbb{F}_p(\alpha)$ は K の部分群だから，ラグランジュの定理より p^n は 10 の約数になるが，$n \geq 2$ より矛盾．

(○) 可換環 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は，$\mathbb{F}_3$ と同型な部分環をもつ．
【解説】　$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は，可換環として同型であるから，$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{F}_3$ は $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の部分環とみなせる．

(○) 体 K の標数が 0 ならば，K 上のすべての既約多項式は重根をもたない．

【解説】　標数 0 の体上では，定数でない任意の多項式 $f(X)$ に対して，$\deg f'(X) = \deg f(X) - 1$ だから，もし $f(X)$ が既約ならば，$f(X)$ の根は $f'(X)$ の根にはなり得ない．

(○) 体 K 上の任意の有限次分離拡大体 L に対して，$L = K(\alpha)$ をみたす $\alpha \in L$ が存在する．

【解説】　定理そのまま．

(○) 標数 0 の体 K 上の任意の有限次拡大体 L に対して，$L = K(\alpha)$ をみたす $\alpha \in L$ が存在する．

【解説】　標数 0 ならばすべての代数拡大は分離拡大である．