代数II　小テスト　2019–01–09

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．

(×) $X^4 - 5X^2 + 6$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体は $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ である．
【解説】　$X^4 - 5X^2 + 6 = (X^2 - 2)(X^2 - 3)$ だから，最小分解体は $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ であって……．

(○) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-2})$ は $X^4 + 1$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体である．
【解説】　X^4+1 の 4 つの根は，絶対値 1 で偏角 $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$ の複素数，すなわち $(\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{-2})/2$（復号任意）で与えられる．これらすべてを $\mathbb{Q}$ の添加して……．

(○) 体の 2 次拡大はつねに正規拡大である．
【解説】　L/K を 2 次拡大とする．$\alpha \in L$ とその K 上の共役元 $\beta \in \overline{K}$ を任意にとる．$\alpha \neq \beta$ ならば α の K 上の最小多項式は 2 次式であり，それを $X^2 + bX + c$ とすると，$\alpha + \beta = -b \in K \subset L$，したがって $\beta = -b - \alpha \in L$．

(○) 標数 0 の体の正規拡大はつねにガロア拡大である．
【解説】　標数 0 の体の拡大はすべて分離的である．

(×) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ は正規拡大である．
【解説】　$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ とすると，$\omega\sqrt[3]{2}$ は $\sqrt[3]{2}$ の $\mathbb{Q}$ 上の共役元であるが，$\omega\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$．

(○) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$ は $\mathbb{Q}$ 上の正規拡大体である．
【解説】　前問のように ω をとり $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ とおくと，L は $X^3 - 2$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体なので，$L/\mathbb{Q}$ は正規拡大．さらに，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ だから $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$．

(○) ζ を 1 の原始 5 乗根とし $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ とすると，$\alpha^5 \in K$ をみたす任意の $\alpha \in \overline{K}$ について，$K(\alpha)/K$ は正規拡大である．
【解説】　クンマー拡大．

(×) 体の拡大 L/K が正規拡大ならば，任意の中間体 M について，L/M, M/K はともに正規拡大である．
【解説】　一般に L/K が正規ならば L/M は正規であるが，M/K は正規であるとは限らない．反例としては，今回の小テストの 5, 6 問目．

(×) M を体の拡大 L/K の中間体とするとき，$L/M,\ M/K$ がともに正規拡大ならば L/K も正規拡大である．

【解説】　$M = \mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ L = M(\sqrt{1+\sqrt{2}})$ とすると，$M/\mathbb{Q},\ L/M$ はともに 2 次拡大だから正規である（今回の小テストの 3 問目）．一方，$\sqrt{1-\sqrt{2}}$ は $\mathbb{Q}$ 上 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ の共役元だが L には属さない（だって，$L \subset \mathbb{R}$ だけど $\sqrt{1-\sqrt{2}} \notin \mathbb{R}$ だもん）．

(○) 体 K 上代数的な元 α について，$K(\alpha)/K$ が正規拡大であるためには，任意の $\beta \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ について $K(\alpha) = K(\beta)$ であることが必要十分である．

【解説】　$K(\alpha)/K$ が正規ならば，α と K 上共役なすべての β について $\beta \in K(\alpha)$ なので，$K(\beta) \subset K(\alpha)$ であるが，$K(\alpha)$ と $K(\beta)$ の K 上の次数は一致するので，$K(\alpha) = K(\beta)$．逆は $\beta \in K(\alpha)$ よりＯＫ．