§1.　2 次, 3 次, 4 次方程式の解の公式

定理 1.1　2 次方程式

$$X^2 + bX + c = 0$$

の解は，$b^2 - 4c$ の平方根をひとつ固定し，それを R とするとき，

$$\frac{-b+R}{2}, \qquad \frac{-b-R}{2}$$

で与えられる．

定理 1.2　3 次方程式

$$X^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

の解は，Y に関する 2 次方程式

$$Y^2 + (2b^3 - 9bc + 27d)Y + (b^2 - 3c)^3 = 0$$

の 2 解それぞれの 3 乗根 R, S を，$RS = b^2 - 3c$ を満たすように一組固定するとき，

$$\frac{-b+R+S}{3}, \qquad \frac{-b+\omega^2 R+\omega S}{3}, \qquad \frac{-b+\omega R+\omega^2 S}{3}$$

で与えられる． ここで，ω は 1 の原始 3 乗根

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

である．

定理 1.3　4 次方程式

$$X^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = 0$$

の解は，Y に関する 3 次方程式

$$Y^3 - (3b^2 - 8c)Y^2 + (3b^4 - 16b^2c + 16c^2 + 16bd - 64e)Y - (b^3 - 4bc + 8d)^2 = 0$$

の 3 解それぞれの平方根 R, S, T を，$RST = -b^3 + 4bc - 8d$ を満たすように一組固定するとき，

$$\frac{-b+R+S+T}{4}, \quad \frac{-b+R-S-T}{4}, \quad \frac{-b-R+S-T}{4}, \quad \frac{-b-R-S+T}{4}$$

で与えられる．

定義 1.4 n 個の不定元 (変数) $x_1, x_2, \dots, x_n$ の多項式 $f(x_1, \dots, x_n)$ は，任意の $\sigma \in S_n$ に対して

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つとき，**対称式**であるという（正確には $x_1, \dots, x_n$ の対称式という）．

定義 1.5 n 個の不定元 (変数) $x_1, x_2, \dots, x_n$ に対して，

$$(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$$

を展開した式

$$X^n - s_1 X^{n-1} + s_2 X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} X + (-1)^n s_n$$

によって定まる $s_1, \dots, s_n$ を，$x_1, \dots, x_n$ の**基本対称式**という． とくに，s_j を j 次の基本対称式という．

例 1.6 基本対称式は対称式である．

$$n = 2 \text{ のとき} \quad \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 \\ s_2 = x_1 x_2 \end{cases}$$

$$n = 3 \text{ のとき} \quad \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ s_3 = x_1 x_2 x_3 \end{cases}$$

$$n = 4 \text{ のとき} \quad \begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \\ s_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \\ s_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 \end{cases}$$

定理 1.7 (対称式の基本定理) $x_1, \dots, x_n$ の任意の対称式 $f(x_1, \dots, x_n)$ に対して，ある n 変数多項式 $G(X_1, \dots, X_n)$ が存在して，

$$f(x_1, \dots, x_n) = G(s_1, \dots, s_n)$$

が成り立つ． すなわち，任意の対称式は基本対称式の多項式として表すことができる．