§2. 体の拡大，拡大次数

定義 2.1 体 K が体 L の部分体であるとき，L を K の**拡大体**という． このとき，体の**拡大** L/K ということが多い． また，M が K の拡大体で，かつ L が M の拡大体であるとき，M を拡大 L/K の**中間体**という．

定義 2.2 L/K を体の拡大とする．

(1) L の部分集合 A に対して，A を含む最小の L/K の中間体を $K(A)$ と表し，K に A を**添加した体**という．

(2) とくに A が有限集合で $A = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ のとき，$K(A)$ を $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ と略記する．

(3) ただひとつの $\alpha \in L$ により $K(\alpha)$ と表される体を K の**単純拡大体**という．この場合，α を拡大 $K(\alpha)/K$ の**原始元**という．

命題 2.3 L/K を体の拡大とし，$\alpha \in L$ とすると，

$$K(\alpha) = \left\{ \frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} \;\middle|\; g(X), h(X) \in K[X],\ h(\alpha) \neq 0 \right\}$$

であり，さらにこれは K 上 α で生成される可換環（すなわち，K と α を含む L の最小の部分環）

$$K[\alpha] = \left\{ \ g(\alpha) \;\middle|\; g(X) \in K[X] \ \right\}$$

の商体である．

例 2.4 有理数体 $\boldsymbol{Q}$ の拡大体について，いくつかの例をあげる．

(1) $\boldsymbol{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{2}-1\right) = \boldsymbol{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boldsymbol{Q}\left(\frac{1+3\sqrt{2}}{5-7\sqrt{2}}\right)$

(2) $\boldsymbol{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

(3) $\boldsymbol{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right) = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt[3]{4}\right)$

(4) $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{R}, \sqrt{-1}\right) = \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{-1}\right) \subsetneq \boldsymbol{C}$

定義 2.5　L/K を体の拡大とする． K 上のベクトル空間としての L の次元を拡大 L/K の**次数**といい $[L:K]$ で表す． $[L:K]$ が有限のとき，L/K は**有限次拡大**であるといい，そうでないとき**無限次**拡大であるという．

例 2.6　(1)　$\boldsymbol{Q}(\sqrt{7})$ は $\boldsymbol{Q}$ 上 2 次拡大である，　$\left[\boldsymbol{Q}(\sqrt{7}):\boldsymbol{Q}\right]=2$

(2)　$\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{5})/\boldsymbol{Q}$ は 3 次拡大である，　$\left[\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{5}):\boldsymbol{Q}\right]=3$

補題 2.7　M を体の拡大 L/K の中間体とし，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in M$，$\beta_1,\cdots,\beta_n\in L$ とする．

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ が K 上 1 次独立，かつ $\beta_1,\cdots,\beta_n$ が M 上 1 次独立ならば，mn 個の L の元 $\alpha_i\beta_j$ $(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$ は K 上 1 次独立である．

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ が K 上 M を生成し，かつ $\beta_1,\cdots,\beta_n$ が M 上 L を生成するならば，$\alpha_i\beta_j$ $(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$ は K 上 L を生成する．

定理 2.8　M を体の拡大 L/K の中間体とすると，

$$[L:K]=[L:M][M:K]$$

が成り立つ． とくに，L/K が有限次拡大であるためには，L/M，M/K がともに有限次拡大であることが必要十分である．