§3. 代数的元

この節全体を通して，L/K を体の拡大とし，$\alpha \in L$ とする．

定義 3.1 α を根とする K 上の零でない多項式が存在するとき，すなわち，

$$\exists f(X) \in K[X] - \{0\} \quad \text{s.t.} \quad f(\alpha) = 0$$

であるとき，α は K 上**代数的**であるという． K 上代数的でない元は，K 上**超越的**であるといわれる．

例 3.2 (1) $\sqrt{3}$ は $\boldsymbol{Q}$ 上代数的である．

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{5}+7}{1-\sqrt{2}}$ は $\boldsymbol{Q}$ 上代数的である．

(3) 自然対数の底 e は $\boldsymbol{Q}$ 上超越的である（Hermite の定理 (1873)）．

(4) 円周率 π は $\boldsymbol{Q}$ 上超越的である（Lindemann の定理 (1882)）．

定理 3.3 α に対して次は同値である．

(i) α は K 上代数的である．

(ii) $K[\alpha]$ は体，すなわち $K[\alpha] = K(\alpha)$ が成り立つ．

(iii) $K(\alpha)/K$ は有限次拡大である．

命題 3.4 α が K 上代数的ならば，$f(\alpha) = 0$ をみたす零でない $f(X) \in K[X]$ に対して，$[K(\alpha) : K] \leq \deg f$ が成り立つ．

定理 3.5 α が K 上代数的であるとき，α を根にもつ $f(X) \in K[X]$ に対して次は同値である．

(i) $f(X)$ は K 上既約である．

(ii) $[K(\alpha) : K] = \deg f$.

(iii) $f(X)$ の次数は最小である． すなわち，$g(X)(\neq 0) \in K[X]$ が α を根にもつならば，$\deg f \leq \deg g$.

定義 3.6 前定理のような多項式 $f(X) \in K[X]$ のうちモニックなものは一意的に定まる． これを α の K 上の**最小多項式**という．

定理 3.7 α が K 上代数的ならば，α の K 上の最小多項式が存在する．

命題 3.8 $K(\alpha)/K$ が有限次拡大で $[K(\alpha):K]=n$ ならば，

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{n-1}$$

は K 上ベクトル空間としての $K(\alpha)$ の基底である．

例 3.9 (1) $\sqrt{3}$ は $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は X^2-3.

(2) $1-\sqrt{5}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は X^2-2X-4.

(3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は $X^3-\dfrac{1}{7}$.

(4) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は $X^6-6X^4-6X^3+12X^2-36X+1$.

最後の例は，たとえば，以下を順に示すことで得られる; ただし，$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$, $f(X)=X^6-6X^4-6X^3+12X^2-36X+1$ とする．

(a) $f(\alpha)=0$ より $[\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]\leq \deg f=6$ (命題 3.4)

(b) $\sqrt[3]{3}=\alpha-\sqrt{2}$ の両辺を 3 乗することにより，$\sqrt{2}\in\boldsymbol{Q}(\alpha)$

(c) $\boldsymbol{Q}(\alpha)=\boldsymbol{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{3})$

(d) $[\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]$ は 2 でも 3 でも割り切れる (定理 2.8) から，$[\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]\geq 6$

(e) (a), (e) をあわせて，$[\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]=6=\deg f$

(f) $f(X)$ は $\boldsymbol{Q}$ 上既約であり α の最小多項式である (定理 3.5).

とくに，$\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q}$ が 6 次拡大であることもわかった．