代数II　小テスト　2019–09–25

学年	学 籍 番 号	氏　　　名

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．

- (　　) 有理数を係数とする 2 次方程式は必ず有理数解を持つ．
- (　　) 3 次方程式の解の公式は，1 の原始 3 乗根を使って表される．
- (　　) 実数を係数とする 5 次方程式は少なくとも一つの実数解を持つ．
- (　　) 複素数を係数とする 5 次方程式で複素数解を持たないものが存在する．
- (　　) $(1-xy)(x-y)^2$ は，2 つの不定元 x,y に関する対称式である．
- (　　) $(x-y)(y-z)(z-x)$ は，3 つの不定元 x,y,z に関する対称式である．
- (　　) $(x+y^2)(y+z^2)(z+x^2)+(x^2+y)(z^2+x)(y^2+z)$ は，3 つの不定元 x,y,z に関する対称式である．
- (　　) n 個の不定元に関する対称式 f に対して，f^2-f+3 は対称式である．
- (　　) n 個の不定元に関する対称式 f,g に対して，差 $f-g$ は対称式ではない．

[問 2] 3 つの不定元 x,y,z に関する対称式　$x^3yz+xy^3z+xyz^3$　を，基本対称式

$$s=x+y+z,\quad t=xy+yz+zx,\quad u=xyz$$

の多項式として表せ．

代数II　小テスト　2019–09–25

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．

(×) 有理数を係数とする 2 次方程式は必ず有理数解を持つ．
【解説】　中学校で学んだように，$X^2-2=0$ が反例．

(○) 3 次方程式の解の公式は，1 の原始 3 乗根を使って表される．
【解説】　解の公式には 1 の原始 3 乗根 ω が現れる．

(○) 実数を係数とする 5 次方程式は少なくとも一つの実数解を持つ．
【解説】　5 次多項式 $f(X)$ に対して，グラフ $Y=f(X)$ は X-軸と少なくとも 1 回は交わる（中間値の定理）ので，$f(X)$ は実数解を持つ．

(×) 複素数を係数とする 5 次方程式で複素数解を持たないものが存在する．
【解説】　代数学の基本定理より少なくともひとつの複素数解を持つ．

(○) $(1-xy)(x-y)^2$ は，2 つの不定元 x,y に関する対称式である．
【解説】　与式を $f(x,y)$ とおけば，$f(y,x)=f(x,y)$ である．

(×) $(x-y)(y-z)(z-x)$ は，3 つの不定元 x,y,z に関する対称式である．
【解説】　与式を $f(x,y,z)$ とおけば，$f(y,x,z)=-f(x,y,z)$．

(○) $(x+y^2)(y+z^2)(z+x^2)+(x^2+y)(z^2+x)(y^2+z)$ は，3 つの不定元 x,y,z に関する対称式である．
【解説】　3 次対称群 S_3 は，互換 $(1\ 2), (1\ 3)$ で生成されるから，x,y の入れ替え，x,z の入れ替えで不変かどうか調べればよい． それらは簡単にチェックできて対称式であることが確認できる．

(○) n 個の不定元に関する対称式 f,g に対して，f^2-f+3 は対称式である．
【解説】　定義にしたがえば，対称式である．

(×) n 個の不定元に関する対称式 f,g に対して，差 $f-g$ は対称式ではない．
【解説】　定義にしたがえば，対称式である．

[問 2] 3 つの不定元 x,y,z に関する対称式　$x^3yz+xy^3z+xyz^3$　を，基本対称式

$$s=x+y+z,\quad t=xy+yz+zx,\quad u=xyz$$

の多項式として表せ．

【解説】　$x^3yz+xy^3z+xyz^3=xyz(x^2+y^2+z^2)$ かつ $x^2+y^2+z^2=s^2-2t$ だから，$x^3yz+xy^3z+xyz^3=\boxed{s^2u-2tu}$．