

代数II 小テスト 2019-10-02

学年	学籍番号	氏名

[問1] 以下の文のそれぞれについて、正しいものには ○ を、正しくないものには × をカッコ内に記せ。ただし  $L/K$  は体の拡大,  $\alpha, \beta \in L$  とする。

- ( ) 一般に,  $K(\alpha) = K(\alpha^{-1})$  が成り立つ.
- ( )  $\alpha - \beta \in K$  かつ  $\alpha \in K$  ならば,  $\beta \in K$  である.
- ( ) 一般に,  $K(\alpha + \beta) = K(\alpha, \beta)$  が成り立つ.
- ( )  $[L : K] = 1$  であるための必要十分条件は  $L = K$  である.
- ( )  $[L : K] = 3$  ならば,  $[M : K] = 2$  である  $L/K$  の中間体  $M$  が存在する.
- ( )  $[L : K]$  が素数ならば,  $L/K$  は単純拡大である.
- ( )  $\alpha, \beta$  が  $K$  上一次独立ならば,  $1, \frac{\alpha}{\beta}$  も  $K$  上一次独立である.
- ( )  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{12})$  が成り立つ.
- ( )  $\sqrt[3]{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  が成り立つ.

[問2]  $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{3}$  とするとき,  $f(\alpha) = 0$  をみたす整数係数の多項式  $f(X)$  を求めよ.

## 代数II 小テスト 2019-10-02

### 答えと簡単な解説

[問1] 以下の文のそれぞれについて、正しいものには○を、正しくないものには×をカッコ内に記せ。ただし  $L/K$  は体の拡大,  $\alpha, \beta \in L$  とする。

- (○) 一般に,  $K(\alpha) = K(\alpha^{-1})$  が成り立つ.  
 【解説】  $\alpha = (\alpha^{-1})^{-1} \in K(\alpha^{-1})$  より  $K(\alpha) \subset K(\alpha^{-1})$  が成り立ち, 逆に  $\alpha^{-1} \in K(\alpha)$  より  $K(\alpha) \supset K(\alpha^{-1})$  が成り立つ.
- (○)  $\alpha - \beta \in K$  かつ  $\alpha \in K$  ならば,  $\beta \in K$  である.  
 【解説】  $\beta = \alpha - (\alpha - \beta) \in K$  よりわかる.
- (×) 一般に,  $K(\alpha + \beta) = K(\alpha, \beta)$  が成り立つ.  
 【解説】  $K = \mathbb{Q}$ ,  $\alpha = \sqrt{2}$ ,  $\beta = -\sqrt{2}$  とすれば,  
 $\mathbb{Q}(\alpha + \beta) = \mathbb{Q}(0) = \mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ .
- (○)  $[L : K] = 1$  であるための必要十分条件は  $L = K$  である.  
 【解説】  $[L : K] = 1$  とすると,  $L$  は  $K$  上の1次元ベクトル空間だから,  $L$  の0でない任意の元は基底である. とくに1は基底であり, したがって, 任意の  $\alpha \in L$  に対して  $\alpha = a \cdot 1$  ( $a \in K$ ) と表されるから,  $\alpha = a \in K$ , よって  $L \subset K$  だから  $L = K$  である. 逆は明らか.
- (×)  $[L : K] = 3$  ならば,  $[M : K] = 2$  である  $L/K$  の中間体  $M$  が存在する.  
 【解説】  $L/K$  の中間体  $M$  に対して  $[L : M][M : K] = [L : K] = 3$  だから,  $[M : K] = 2$  とはなり得ない.
- (○)  $[L : K]$  が素数ならば,  $L/K$  は単純拡大である.  
 【解説】  $\alpha \notin K$  である任意の  $\alpha \in L$  をとれば,  $K \subsetneq K(\alpha) \subset L$  より  $[K(\alpha) : K] > 1$ . 一方,  $[L : K(\alpha)][K(\alpha) : K] = [L : K]$  は仮定より素数なので,  $[K(\alpha) : K] = [L : K]$ . よって  $[L : K(\alpha)] = 1$ ,  $\therefore L = K(\alpha)$ .
- (○)  $\alpha, \beta$  が  $K$  上一次独立ならば,  $1, \frac{\alpha}{\beta}$  も  $K$  上一次独立である.  
 【解説】  $a, b \in K$  が  $a + b\frac{\alpha}{\beta} = 0$  をみたすとする.  $\beta$  を掛ければ  $a\beta + b\alpha = 0$  であるが, 仮定より  $\beta, \alpha$  は  $K$  上一次独立なので,  $a = b = 0$ .
- (○)  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{12})$  が成り立つ.  
 【解説】  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ,  $\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{12} \in \mathbb{Q}(\sqrt{12})$  よりOK.
- (×)  $\sqrt[3]{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  が成り立つ.  
 【解説】  $\sqrt[3]{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  とすると,  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  だが,  $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2$ ,  $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}] = 3$  なので矛盾.

[問2]  $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{3}$  とするとき,  $f(\alpha) = 0$  をみたす整数係数の多項式  $f(X)$  を求めよ.

【解説】  $\alpha^2 = 5 - 2\sqrt{15} + 3$  より  $-2\sqrt{15} = \alpha^2 - 8$  だから, 再び平方して  $60 = \alpha^4 - 16\alpha^2 + 64$ . よって,  $f(X) = \boxed{X^4 - 16X^2 + 4}$  とすれば  $f(\alpha) = 0$ .