代数II　小テスト　2019–10–09

学年	学 籍 番 号	氏　　名

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ． ただし L/K は体の拡大で，$\alpha \in L$ とする．

(　) K の任意の元は L 上代数的である．

(　) α^3 が K 上代数的ならば，α も K 上代数的である．

(　) 準同型写像 $\varphi_\alpha : K[X] \to L,\ g(X) \mapsto g(\alpha)$ の核 $\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ は $K[X]$ の素イデアルである．

(　) α が K 上代数的ならば，前問で定義した核 $\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ について，剰余環 $K[X]/\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ は体ではない．

(　) α が K 上超越的ならば，$\dfrac{1}{1-\alpha} \in K[\alpha]$ が成り立つ．

(　) 自然対数の底 e は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．

(　) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ は $\mathbb{Q}$ 上超越的である．

(　) $\sqrt[3]{2}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上代数的である．

(　) 円周率 π は $\mathbb{Q}(\pi^5)$ 上超越的である．

(　) 複素数 z が $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，共役複素数 $\bar{z}$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的である．

代数II　小テスト　2019–10–09

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ． ただし L/K は体の拡大で，$\alpha \in L$ とする．

(○) K の任意の元は L 上代数的である．
【解説】　任意の $\alpha \in K$ は 1 次式 $X - \alpha \in K[X]$ の根である．

(○) α^3 が K 上代数的ならば，α も K 上代数的である．
【解説】　仮定より，α^3 を根に持つ零でない $f(X) \in K[X]$ が存在する． $g(X) = f(X^3)$ とおけば，これも K 上の零でない多項式であり，$g(\alpha) = f(\alpha^3) = 0$.

(○) 準同型写像 $\varphi_\alpha : K[X] \to L,\ g(X) \mapsto g(\alpha)$ の核 $\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ は $K[X]$ の素イデアルである．
【解説】　一般に可換環から整域への準同型写像の核は素イデアルである．

(×) α が K 上代数的ならば，前問で定義した核 $\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ について，剰余環 $K[X]/\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ は体ではない．
【解説】　前問より $\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ は素イデアルだが，α が代数的であることより (0) ではない． 一般に PID において，(0) でない素イデアルは極大イデアルだから，$\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ は極大イデアル，したがって当該の剰余環は体である．

(×) α が K 上超越的ならば，$\dfrac{1}{1-\alpha} \in K[\alpha]$ が成り立つ．
【解説】　$\dfrac{1}{1-\alpha} \in K[\alpha]$ とすると，$\dfrac{1}{1-\alpha} = f(\alpha)$ をみたす $f(X) \in K[X]$ がとれる． このとき $g(X) = (1-X)f(X) \in K[X]$ であって $g(\alpha) = 0$ だから，α は K 上代数的.

(×) 自然対数の底 e は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
【解説】　講義で紹介した通り，代数的ではない．

(×) $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ は $\mathbb{Q}$ 上超越的である．
【解説】　前回の小テストの最後の問題と同様にして，整数係数の多項式で $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ を根に持つものが作れるから，$\sqrt{2} + \sqrt{7}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的.

(○) $\sqrt[3]{2}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上代数的である．
【解説】　$X^3 - 2$ は $\sqrt[3]{2}$ を根にもつ $\mathbb{Q}$ 上の多項式であるが，$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ なので $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 上の多項式でもある．

($\times$) 円周率 π は $\mathbb{Q}(\pi^5)$ 上超越的である．

【解説】　$F = \mathbb{Q}(\pi^5)$ とおけば，π は $X^5 - \pi^5 \in F[X]$ の根であるから F 上代数的．

(○) 複素数 z が $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，共役複素数 $\bar{z}$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的である．

【解説】　z を根に持つ $\mathbb{Q}$ 上の多項式は $\bar{z}$ も根に持つ．