代数 II　小テスト　2019–10–16

学年	学 籍 番 号	氏　　名

[問 1]　以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ． ただし L/K は体の拡大で，$\alpha, \beta \in L$ とする．

(　) α が K 上代数的ならば，L/K の任意の中間体 M について，α は M 上代数的である．

(　) α が K 上代数的ならば，L/K の任意の中間体 M について，つねに $[M(\alpha) : M] \leq [K(\alpha) : K]$ である．

(　) $f(X), g(X) \in K[X]$ がそれぞれ m 次，n 次で，$f(\alpha) = g(\beta) = 0$ をみたすならば，$[K(\alpha, \beta) : K] \leq mn$ が成り立つ．

(　) α, β が K 上代数的でも，$\alpha + \beta$ は K 上代数的とは限らない．

(　) $[K(\alpha) : K] = 2$ かつ $[K(\beta) : K] = 4$ ならば，つねに $[K(\alpha, \beta) : K] = 8$ である．

(　) α が K 上代数的で，その K 上の最小多項式を $g(X)$ とすると，$g(X) = (X - \alpha)h(X)$ （ただし $h(X) \in L[X]$） と分解される．

(　) α の K 上の最小多項式の次数を d とすると，α^2 の K 上の最小多項式の次数は $2d$ である．

[問 2]　以下の α と K について，α の K 上の最小多項式を求めよ．

(な) $\alpha = \sqrt{2} + 3, \quad K = \mathbb{Q}$

(か) $\alpha = \sqrt[4]{3} - 5, \quad K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

(の) $\alpha = \dfrac{1}{\beta}$，ただし β は $X^3 - 4X + 2$ の根，　$K = \mathbb{Q}$

代数II　小テスト　2019–10–16

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ． ただし L/K は体の拡大で，$\alpha \in L$ である．

(○) α が K 上代数的ならば，L/K の任意の中間体 M について，α は M 上代数的である．
【解説】　K 上の多項式は M 上の多項式でもある．

(○) α が K 上代数的ならば，L/K の任意の中間体 M について，つねに $[M(\alpha):M] \leq [K(\alpha):K]$ である．
【解説】　α の K 上の最小多項式を $f(X)$ とすると，$[K(\alpha):K] = \deg f(X)$． 一方，$f(X)$ は α を根に持つ M 上の多項式でもあるから，$[M(\alpha):M] \leq \deg f(X)$ である．

(○) $f(X), g(X) \in K[X]$ がそれぞれ m 次，n 次で，$f(\alpha) = g(\beta) = 0$ をみたすならば，$[K(\alpha,\beta):K] \leq mn$ が成り立つ．
【解説】　$[K(\alpha):K] \leq \deg f(X) = m$, $[K(\beta):K] \leq \deg g(X) = n$ であるが，さらに前問が正しいので（$M = K(\beta)$ として），
$[K(\beta,\alpha):K(\beta)] \leq [K(\alpha):K] \leq m$． よって，
$[K(\alpha,\beta):K] = [K(\alpha,\beta):K(\beta)][K(\beta):K] \leq mn$．

(×) α, β が K 上代数的でも，$\alpha+\beta$ は K 上代数的とは限らない．
【解説】　前問は正しいので，$K(\alpha,\beta)/K$ は有限次拡大であり，$\alpha+\beta \in K(\alpha,\beta)$ だから，$K(\alpha+\beta)/K$ も有限次，したがって $\alpha+\beta$ は K 上代数的．

(×) $[K(\alpha):K] = 2$ かつ $[K(\beta):K] = 4$ ならば，つねに $[K(\alpha,\beta):K] = 8$ である．
【解説】　$K = \mathbb{Q}$，$\alpha = \sqrt{2}$，$\beta = \sqrt[4]{2}$ が反例を与える．

(○) α が K 上代数的で，その K 上の最小多項式を $g(X)$ とすると，$g(X) = (X-\alpha)h(X)$ （ただし $h(X) \in L[X]$） と分解される．
【解説】　$g(\alpha) = 0$ だから L において上のように分解される．

(×) α の K 上の最小多項式の次数を d とすると，α^2 の K 上の最小多項式の次数は $2d$ である．
【解説】　$K(\alpha^2) \subset K(\alpha)$ だから，$[K(\alpha^2):K] \leq [K(\alpha):K]$． 一方，左辺右辺はそれぞれ α^2, α の K 上の最小多項式の次数に等しい．

[問 2] 以下の α と K について，α の K 上の最小多項式を求めよ．

(な) $\alpha = \sqrt{2} + 3, \quad K = \mathbb{Q}$

【解説】 $\alpha - 3 = \sqrt{2}$ を平方すれば，$\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 2$． よって $\boxed{X^2 - 6X + 7}$.

(か) $\alpha = \sqrt[4]{3} - 5, \quad K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

【解説】 $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ より $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$． 一方，$\sqrt{3} = \sqrt[4]{3}^2 \in \mathbb{Q}(\alpha)$ かつ $[K : \mathbb{Q}] = 2$ だから，$[\mathbb{Q}(\alpha) : K] = 2$． よって求める最小多項式の次数は 2 である． そこで，α を根に持つ K 上の次数 2 の多項式を見つければよい． $\alpha + 5 = \sqrt[4]{3}$ を 2 乗して $\sqrt{3}$ を以降すれば $\boxed{X^2 + 10X + 25 - \sqrt{3}}$ を得る．

(の) $\alpha = \dfrac{1}{\beta}$，ただし β は $X^3 - 4X + 2$ の根， $K = \mathbb{Q}$

【解説】 与えられた多項式はアイゼンシュタインの定理から $\mathbb{Q}$ 上既約，よって $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 3$ である． いま，$\beta^3 - 4\beta + 2 = 0$ を β^3 で割ると，$1 - 4\alpha^2 + 2\alpha^3 = 0$． さらに $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 3$ に注意して，$\boxed{X^3 - 2X^2 + \dfrac{1}{2}}$.