代数II　小テスト　2019–10–23

学年	学 籍 番 号	氏　　名

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．

(　　) $\sqrt{5}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ 上代数的である．

(　　) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{4}}+\dfrac{1}{\sqrt[5]{5}}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．

(　　) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．

(　　) L/K が超越拡大で M が L と異なる中間体ならば，L/M はつねに超越拡大である．

(　　) L/K が無限次拡大ならば，L/K は代数拡大ではない．

(　　) 実数体 $\mathbb{R}$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の代数拡大体である．

(　　) 複素数体 $\mathbb{C}$ は実数体 $\mathbb{R}$ 上の代数拡大体である．

(　　) $\mathbb{Q}$ 上代数的な複素数全体 $\overline{\mathbb{Q}}$ は可算集合である．

(　　) 1 のべき根全体の集合を W とする; $W=\{\, z\in\mathbb{C} \mid \exists n\in\mathbb{N} \text{ s.t. } z^n=1\,\}$. このとき，$\mathbb{Q}(W)/\mathbb{Q}$ は代数拡大である．

(　　) 複素数平面上の単位円を S とする; $S=\{\, z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\,\}$.（前問の W は S の部分集合であることに注意） このとき，任意の $\mathbb{Q}(S)/\mathbb{Q}$ は代数拡大である．

代数II　小テスト　2019–10–23

答えと簡単な解説

[問 1]　以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．

(○) $\sqrt{5}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ 上代数的である．
【解説】　$\sqrt{5}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的なので，$\mathbb{Q}$ の任意の拡大体上で代数的．

(○) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{4}}+\dfrac{1}{\sqrt[5]{5}}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
【解説】　$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[5]{5}$ はどれも $\mathbb{Q}$ 上代数的なので，それらの逆数の有限和も $\mathbb{Q}$ 上代数的．

(×) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
【解説】　この和は無限大に発散する．

(×) L/K が無限次拡大ならば，L/K は代数拡大ではない．
【解説】　$A=\left\{\sqrt[n]{3}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$ とおくと，$\mathbb{Q}(A)$ は無限次代数拡大．

(×) L/K が超越拡大で M が L と異なる中間体ならば，L/M はつねに超越拡大である．
【解説】　$\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}$ は超越拡大であり，$\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}(\pi^2)$ は代数拡大．

(×) 実数体 $\mathbb{R}$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の代数拡大体である．
【解説】　$\pi\in\mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 上超越的．

(○) 複素数体 $\mathbb{C}$ は実数体 $\mathbb{R}$ 上の代数拡大体である．
【解説】　$\mathbb{C}=\mathbb{R}(\sqrt{-1})$ かつ，$\sqrt{-1}$ は $\mathbb{R}$ 上代数的なので，$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ は代数拡大．

(○) $\mathbb{Q}$ 上代数的な複素数全体 $\overline{\mathbb{Q}}$ は可算集合である．
【解説】　$\alpha\in\mathbb{C}$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的で，$f(X)$ をその最小多項式とするとき，$f(X)$ のすべての係数を既約分数で表し，分子分母の絶対値の最大値を $h(\alpha)$ とする（たとえば $h(\sqrt{2})=2,\ h\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)=5$）．このとき，自然数 m,n に対して

$$A(m,n)=\left\{\,\alpha\in\overline{\mathbb{Q}}\,\middle|\,[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=m\ \text{かつ}\ h(\alpha)=n\,\right\}$$

とおけば，$A(m,n)$ は有限集合である． さらに

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A(m,n)$$

なので，$\overline{\mathbb{Q}}$ も可算集合である．

(○) 1 のべき根全体の集合を W とする; $W = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } z^n = 1 \,\}$. このとき，$\mathbb{Q}(W)/\mathbb{Q}$ は代数拡大である．
【解説】 W の任意の元は $\mathbb{Q}$ 上代数的なので，$\mathbb{Q}(W)$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的．

(×) 複素数平面上の単位円を S とする; $S = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$.（前問の W は S の部分集合であることに注意） このとき，任意の $\mathbb{Q}(S)/\mathbb{Q}$ は代数拡大である．
【解説】 もし $\mathbb{Q}(S)$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，前の前の問題より $\mathbb{Q}(S)$ は可算集合であるが，S は非可算無限集合だから矛盾．