代数II　小テスト　2019–10–30

学年	学 籍 番 号	氏　　　名

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ． ただし，L/K を体の拡大，$\alpha \in L$ とし，写像

$$\varphi : K[X] \longrightarrow L, \qquad g(X) \mapsto g(\alpha)$$

を考える．

(　　) 写像 φ は（可換環の）準同型写像である．

(　　) $\dfrac{1}{\alpha} \in \operatorname{Im}\varphi$ ならば，α は K 上代数的である．

(　　) α が K 上超越的ならば，$\operatorname{Im}\varphi$ は体である．

(　　) $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ ならば，α は K 上代数的である．

(　　) α が K 上代数的で，$f(X)$ が α の K 上の最小多項式ならば，$\operatorname{Ker}\varphi = (f(X))$ が成り立つ．

(　　) $f(\alpha) = 0$ をみたす K 上の零でない任意の多項式 $f(X)$ に対して，体 $K(\alpha)$ は剰余環 $K[X]/(f(X))$ と同型である．

(　　) $\mathbb{R}$ 上の任意の 3 次多項式 $f(X)$ に対して，剰余環 $\mathbb{R}[X]/(f(X))$ は体である．

(　　) $\mathbb{C}$ は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ と同型である．

(　　) $\mathbb{C}$ は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 2X + 6)$ と同型である．

(　　) $\mathbb{C}$ は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 2X - 6)$ と同型である．

代数II　小テスト　2019–10–30

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ． ただし，L/K を体の拡大，$\alpha \in L$ とし，写像

$$\varphi : K[X] \longrightarrow L, \qquad g(X) \mapsto g(\alpha)$$

を考える．

(○) 写像 φ は（可換環の）準同型写像である．
【解説】 $g(X), h(X) \in K[X]$ ならば，$\varphi(g(X)+h(X)) = g(\alpha)+h(\alpha) = \varphi(g(X))+\varphi(h(X))$，かつ $\varphi(g(X)h(X)) = g(\alpha)h(\alpha) = \varphi(g(X))\varphi(h(X))$.

(○) $\dfrac{1}{\alpha} \in \operatorname{Im}\varphi$ ならば，α は K 上代数的である．
【解説】 $\dfrac{1}{\alpha} = \varphi(h(X)) = h(\alpha)$ をみたす $h(X) \in K[X]$ がとれるから，$g(X) = Xh(X) - 1$ とおけば，$g(\alpha) = \alpha h(\alpha) - 1 = 0$.

(×) α が K 上超越的ならば，$\operatorname{Im}\varphi$ は体である．
【解説】 もし体ならば $1/\alpha \in \operatorname{Im}\varphi$ であり，前問と同様にして，α は K 上代数的.

(×) $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ ならば，α は K 上代数的である．
【解説】 $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ より，$g(\alpha) = 0$ となる K 上の多項式 $g(X)$ は（零多項式の他に）存在しない．

(○) α が K 上代数的で，$f(X)$ が α の K 上の最小多項式ならば，$\operatorname{Ker}\varphi = (f(X))$ が成り立つ．
【解説】 $f(\alpha) = 0$ より $f(X) \in \operatorname{Ker}\varphi$． さらに $f(X)$ は K 上既約だから $(f(X))$ は極大イデアル． よって $(f(X)) = \operatorname{Ker}\varphi$.

(×) $f(\alpha) = 0$ をみたす K 上の零でない任意の多項式 $f(X)$ に対して，体 $K(\alpha)$ は剰余環 $K[X]/(f(X))$ と同型である．
【解説】 $f(X)$ が K 上既約でないと，$K[X]/(f(X))$ は体ではない．

(×) $\mathbb{R}$ 上の任意の 3 次多項式 $f(X)$ に対して，剰余環 $\mathbb{R}[X]/(f(X))$ は体である．
【解説】 3 次多項式 $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ は必ず実根をもつから，それを $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると $X - \alpha$ は $f(X)$ の因子である． よって $f(X)$ は $\mathbb{R}$ 上既約ではないので，$\mathbb{R}[X]/(f(X))$ は体ではない．

(○) $\mathbb{C}$ は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ と同型である．

【解説】　$\mathbb{R}[X] \to \mathbb{C},\ g(X) \mapsto g(\sqrt{-1})$ は全射準同型で核は (X^2+1)．

(○) $\mathbb{C}$ は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2-2X+6)$ と同型である．

【解説】　X^2-2X+6 は実数の根を持たない 2 次式なので，$\mathbb{R}$ 上既約であり，α をその根とすれば，$\mathbb{R}[X]/(X^2-2X+6)$ は $\mathbb{R}(\alpha)$ と同型である． 一方，具体的に $\alpha = 1+\sqrt{-5}$ または $1-\sqrt{-5}$ と書けるので $\mathbb{R}(\alpha) = \mathbb{R}(\sqrt{-5})$ となるが，$\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ より，$\mathbb{R}(\alpha) = \mathbb{R}(\sqrt{-1}) = \mathbb{C}$．

(×) $\mathbb{C}$ は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^2-2X-6)$ と同型である．

【解説】　X^2-2X-6 は実数の根を持つ 2 次式なので，$\mathbb{R}$ 上既約ではなく，よって $\mathbb{R}[X]/(X^2-2X-6)$ は体ではない．