代数II　小テスト　2019–11–06

学年	学 籍 番 号	氏　　　名

[問 1]　以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．

- (　　) 実数 x, y がどちらも $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，複素数 $x+y\sqrt{-1}$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
- (　　) x, y を実数とする． 複素数 $x+y\sqrt{-1}$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，x, y はどちらも $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
- (　　) 体 K 上のふたつの拡大体 L, M が K 上同型ならば，つねに $[L:K]=[M:K]$ が成り立つ．
- (　　) 体 K 上のふたつの有限次拡大体 L, M が $[L:K]=[M:K]$ をみたすならば，つねに K 上同型である．
- (　　) ガウスが初めて証明したとされる『代数学の基本定理』は，$\mathbb{C}$ が代数的閉体であることを主張している．
- (　　) L が $\mathbb{Q}$ を含む代数的閉体ならば，任意の整数 n について $\sqrt{n} \in L$ が成り立つ．
- (　　) $\mathbb{Q}$ 上代数的な複素数全体の集合は，代数的閉体である．
- (　　) 代数的閉体は無限集合である．
- (　　) L が体 K の代数的閉包ならば，L/K の任意の中間体 M について，L は M の代数的閉包である．
- (　　) L を体 K の代数的閉包とし，$F(X, Y)$ を定数でない K 上の 2 変数多項式とすると，$F(x, y)=0$ をみたす $x, y \in L$ が存在する．

代数II　小テスト　2019–11–06

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．

(○) 実数 x, y がどちらも $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，複素数 $x + y\sqrt{-1}$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
【解説】　$\sqrt{-1}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的だから，体 $\mathbb{Q}(x, y, \sqrt{-1})$ は $\mathbb{Q}$ 上の代数拡大体であり $x + y\sqrt{-1}$ はそれに属している．

(○) x, y を実数とする． 複素数 $x + y\sqrt{-1}$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，x, y はどちらも $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
【解説】　$\alpha = x + y\sqrt{-1}$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的であるとし，その最小多項式を $f(X)$ とする． $f(\alpha) = 0$ の複素共役をとって $f(\bar{\alpha}) = 0$，したがって $\bar{\alpha} = x - y\sqrt{-1}$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的． よって，$x = \dfrac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}$， $y = \dfrac{\alpha - \bar{\alpha}}{2\sqrt{-1}}$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的．

(○) 体 K 上のふたつの有限次拡大体 L, M が K 上同型ならば，つねに $[L : K] = [M : K]$ が成り立つ．
【解説】　体の K 上の同型写像は，K 上の線形同型写像だから L, M の K 上の次元は等しい．

(×) 体 K 上のふたつの有限次拡大体 L, M が $[L : K] = [M : K]$ をみたすならば，つねに K 上同型である．
【解説】　$L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), M = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ はどちらも $\mathbb{Q}$ 上の 2 次拡大体であるが，$\mathbb{Q}$ 上同型ではない． だって，もし $\mathbb{Q}$ 上の同型写像 $\sigma : L \to M$ があったとすると，$\sigma(\sqrt{2})^2 = \sigma((\sqrt{2})^2) = \sigma(2) = 2$ だから $\sigma(\sqrt{2})$ は $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ のどちらかに一致，したがって $\sqrt{2} \in M$ であるが，一方で $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立だから，$[M : \mathbb{Q}] > 2$ となって矛盾するもん．

(○) ガウスが初めて証明したとされる『代数学の基本定理』は，$\mathbb{C}$ が代数的閉体であることを主張している．
【解説】　そゆこと．

(○) L が $\mathbb{Q}$ を含む代数的閉体ならば，任意の整数 n について $\sqrt{n} \in L$ が成り立つ．
【解説】　$\sqrt{n}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的だから L 上も代数的，よって $\sqrt{n} \in L$．

(○) $\mathbb{Q}$ 上代数的な複素数全体の集合は，代数的閉体である．

【解説】　$\mathbb{Q}$ 上代数的な複素数全体の集合を L とおくと，L は $\mathbb{Q}$ 上の代数拡大体である． α が L 上代数的ならば，その L 上の最小多項式を $f(X)$ とするとき，$f(\beta)=0$ をみたす $\beta \in \mathbb{C}$ が存在する（だって，$L \subset \mathbb{C}$ かつ $\mathbb{C}$ は代数的閉体だもん）．β は L 上代数的，よって $\mathbb{Q}$ 上も代数的だから $\beta \in L$． したがって $f(X)$ は1次式であり $\alpha \in L$．

(○) 代数的閉体は無限集合である．

【解説】　L を代数的閉体とする． もし L が有限集合だとすると，L 上の多項式 $f(X)=\prod_{\alpha \in L}(X-\alpha)+1$ は L で根をもたない．

(○) L が体 K の代数的閉包ならば，L/K の任意の中間体 M について，L は M の代数的閉包である．

【解説】　L/K が代数拡大だから L/M も代数拡大．

(○) L を体 K の代数的閉包とし，$F(X,Y)$ を定数でない K 上の2変数多項式とすると，$F(x,y)=0$ をみたす $x, y \in L$ が存在する．

【解説】　$F(X,Y)$ が X についての多項式（Y を含まない）ならば，L が代数的閉体なので $F(x,0)=0$ をみたす $x \in L$ がとれる． $F(X,Y)$ が X も Y も含む場合には，Y の多項式としての最高次の項を $f(X)Y^n$ ($n>0$, $f(X) \in K[X]$) とするとき，$f(x) \neq 0$ である $x \in L$ がとれて（だって L は無限集合だもん），$F(x,Y)$ は定数でない L 上の n 次多項式となるから $F(x,y)=0$ をみたす $y \in L$ が存在する． (もっと簡単に証明できそうだなぁ…)