代数II　小テスト　2019–11–13

学年	学 籍 番 号	氏　　名

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには $\times$ をカッコ内に記せ． ただし，$\overline{K}$ は 体 K の代数的閉包である．

(　　) 体の拡大 L/K の任意の中間体 M に対して，$\mathrm{Aut}(L/M) \subset \mathrm{Aut}(L/K)$ が成り立つ．

(　　) 体の拡大 L/K の任意の中間体 M に対して，$\mathrm{Aut}(M/K) \subset \mathrm{Aut}(L/K)$ が成り立つ．

(　　) $\mathrm{Conj}(1+\sqrt{3}, \mathbb{Q}) = \{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}$ が成り立つ．

(　　) $\sqrt[3]{5}+7$ と $\omega\sqrt[3]{5}-7$ は $\mathbb{Q}$ 上共役である． ここで，ω は 1 の原始 3 乗根とする．

(　　) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ と $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上共役である．

(　　) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ と $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 上共役である．

(　　) M が $\overline{K}/K$ の中間体で，$\alpha, \beta \in \overline{K}$ が M 上共役ならば，α, β は K 上共役である．

(　　) $\alpha, \beta \in \overline{K}$ に対して，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) \cap \mathrm{Conj}(\beta, K) \neq \phi$ ならば，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) = \mathrm{Conj}(\beta, K)$ が成り立つ．

(　　) L/K を代数拡大とし $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ とすると，任意の $\alpha \in L$ に対して $\sigma(\alpha) \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ が成り立つ．

[問 2] $\mathrm{Conj}\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \mathbb{Q}(\sqrt{3})\right)$ を求めよ．

代数II　小テスト　2019–11–13

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．ただし，$\overline{K}$ は 体 K の代数的閉包である．

(○) 体の拡大 L/K の任意の中間体 M に対して，$\mathrm{Aut}(L/M) \subset \mathrm{Aut}(L/K)$ が成り立つ．

【解説】　$\sigma \in \mathrm{Aut}(L/M)$ ならば，$\sigma : L \to L$ は準同型であって，任意の $x \in M$ に対して $\sigma(x) = x$．一方，$K \subset M$ であるから，$x \in K$ についても $\sigma(x) = x$ であり $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$．

(×) 体の拡大 L/K の任意の中間体 M に対して，$\mathrm{Aut}(M/K) \subset \mathrm{Aut}(L/K)$ が成り立つ．

【解説】　$\sigma \in \mathrm{Aut}(M/K)$ とする．$M \subsetneq L$ であるとき，$\sigma : M \to M$ を L から L への写像とみなす自然な方法がない．

(○) $\mathrm{Conj}(1+\sqrt{3}, \mathbb{Q}) = \{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}$ が成り立つ．

【解説】　$1+\sqrt{3}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $(X-1)^2-3$ の根は $1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$ である．

(×) $\sqrt[3]{5}+7$ と $\omega\sqrt[3]{5}-7$ は $\mathbb{Q}$ 上共役である．ここで，ω は 1 の原始 3 乗根とする．

【解説】　$\sqrt[3]{5}+7$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $(X-7)^3-5$ だが，$\omega\sqrt[3]{5}-7$ の最小多項式は $(X+7)^3-5$ であって一致しない．

(○) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ と $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上共役である．

【解説】　これらはどちらも $(X-\sqrt{2})^2-3$ の根だから $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上共役．

(×) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ と $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 上共役である．

【解説】　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は $(X-\sqrt{3})^2-2$ の根だが，この多項式は $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ の根ではない．とくに，これらの $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 上の最小多項式は一致しない．

(○) M が $\overline{K}/K$ の中間体で，$\alpha, \beta \in \overline{K}$ が M 上共役ならば，α, β は K 上共役である．

【解説】　α の K 上の最小多項式を $f(X)$ とし，M 上の最小多項式を $g(X)$ とすると，$g(X)$ は $f(X)$ を割り切るから，$g(X)$ の根は $f(X)$ の根でもある．α, β は M 上共役だから $g(\beta) = 0$，よって $f(\beta) = 0$ となるから β は K 上 α と共役．

(○) $\alpha, \beta \in \overline{K}$ に対して，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) \cap \mathrm{Conj}(\beta, K) \neq \phi$ ならば，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) = \mathrm{Conj}(\beta, K)$ が成り立つ．

【解説】 $\gamma \in \mathrm{Conj}(\alpha, K) \cap \mathrm{Conj}(\beta, K)$ とすると，α, γ は K 上共役で，かつ β, γ も K 上共役，よって α, β は K 上共役である． そこで，$\delta \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ ならば，α, δ が共役より，β, δ が共役，よって $\delta \in \mathrm{Conj}(\beta, K)$ であり，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) \subset \mathrm{Conj}(\beta, K)$． 逆も同様．

(○) L/K を代数拡大とし $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ とすると，任意の $\alpha \in L$ に対して $\sigma(\alpha) \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ が成り立つ．

【解説】 α と $\sigma(\alpha)$ は K 上共役である．

[問 2] $\mathrm{Conj}\left(\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \mathbb{Q}(\sqrt{3})\right)$ を求めよ．

【解】 $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 上の最小多項式は $(X^2 - \sqrt{3})^2 - 2$ であり，根を求めれば

$$\boxed{\left\{ \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \quad -\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \quad \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \quad -\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \right\}}$$