代数II　小テスト　2019–11–20

学年	学 籍 番 号	氏　　　名

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ． ただし，$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とする．

(　　) n を自然数とするとき，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が体であるためには n が素数であることが必要十分である．

(　　) L が体 K の拡大体ならば，一般に，L の標数は K の標数より大きい．

(　　) 標数 7 の体上の多項式 $X^2 + X + 1$ は，解 2 と 4 を持つ．

(　　) $X^3 + X + 1$ は $\mathbb{F}_2$ 上既約である．

(　　) $X^3 + X + 1$ は $\mathbb{F}_3$ 上既約である．

(　　) $X^2 + 1$ は $\mathbb{F}_3$ 上既約である．

(　　) 元の個数が 9 である体が存在する．

(　　) 標数が 9 である体が存在する．

(　　) 可換環 $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ は，体 $\mathbb{F}_3$ と同型な部分環をもつ．

(　　) K を標数 $p > 0$ の体とすると，K 上の多項式の関係式

$$X^p - X = \prod_{a=0}^{p-1}(X - a)$$

が成り立つ．

代数II　小テスト　2019–11–20

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ． ただし，$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とする．

(○) n を自然数とするとき，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が体であるためには n が素数であることが必要十分である．
【解説】　$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が体であることと，$n\mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}$ の極大イデアルであることは同値だが，$\mathbb{Z}$ は PID なので，このことは n が $\mathbb{Z}$ の既約元，すなわち素数であることと同値である．

(×) L が体 K の拡大体ならば，一般に，L の標数は K の標数より大きい．
【解説】　自然な写像 $\mathbb{Z} \to K$ と $\mathbb{Z} \to L$ の像は一致するから，核も一致し，標数は等しい．

(○) 標数 7 の体上の多項式 $X^2 + X + 1$ は，解 2 と 4 を持つ．【解説】
$f(X) = X^2 + X + 1$ とおけば，$f(2) = 7$ かつ $f(4) = 21$ なので，標数 7 の体では $f(2) = f(4) = 0$ である．

(○) $X^3 + X + 1$ は $\mathbb{F}_2$ 上既約である．
【解説】　3 次式なので，$\mathbb{F}_2$ 上可約であるためには $\mathbb{F}_2$ に根をもつことが必要十分であるが，$0, 1 \in \mathbb{F}_2$ はどちらも根ではないので，$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ に根をもたない．

(×) $X^3 + X + 1$ は $\mathbb{F}_3$ 上既約である．
【解説】　前問と同様に考える． $\mathbb{F}_3$ において $1^3 + 1 + 1 = 0$ より，$1 \in \mathbb{F}_3$ は根である．

(○) $X^2 + 1$ は $\mathbb{F}_3$ 上既約である．
【解説】　前問，前々問と同様に考える． -1 は 3 を法として平方非剰余だから，$\mathbb{F}_3$ の任意の元は $X^2 + 1$ の根ではない．

(○) 元の個数が 9 である体が存在する．
【解説】　前問より，$\mathbb{F}_3$ 上の 2 次既約多項式が存在する． α をその根として $K = \mathbb{F}_3(\alpha)$ とすると，$[K : \mathbb{F}_3] = 2$ だから，ベクトル空間として K と $\mathbb{F}_3^2$ は同型，したがって K は元の個数 $3^2 = 9$ の体である．

(×) 標数が 9 である体が存在する．
【解説】　体の標数は 0 または素数である．

(○) 可換環 $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ は，$\mathbb{F}_3$ と同型な部分環をもつ．

【解説】　$\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ から $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ への写像 f を，$f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = 6$ によって定めると，f は環の準同型写像であることが確かめられる． また明らかに f は単射なので，$\operatorname{Im} f$ は $\mathbb{F}_3$ と同型な $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ の部分環である．

(○) K を標数 $p > 0$ の体とすると，K 上の多項式の関係式

$$X^p - X = \prod_{a=0}^{p-1} (X - a)$$

が成り立つ．

【解説】　フェルマーの定理より，任意の整数 c に対して $c^p \equiv c \pmod p$ が成り立つから，K の元 $a = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$ はすべて $X^p - X$ の根であり，これらは相異なるから与式のような因数分解を得る．