代数II　小テスト　2019–11–27

学年	学 籍 番 号	氏　　名

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．

(　　) K が標数 $p > 0$ の体ならば，任意の $a, b \in K$ に対して $(a+b)^p = a^p + b^p$ が成り立つ．

(　　) p を素数とすると，任意の $a \in \mathbb{F}_p$ に対して $a^p = a$ が成り立つ．

(　　) $\mathbb{F}_7$ 上の多項式 $X^7 + 5$ は分離多項式である．

(　　) 標数 $p > 0$ の体 K 上の既約多項式 $f(X)$ が重根をもつならば，$\deg f(X)$ は p の倍数である．

(　　) 標数 $p > 0$ の体 K の有限次拡大体 L が分離的でないならば，$[L : K]$ は p で割り切れない．

(　　) 標数 $p > 0$ の体上の多項式 $X^p - X + 1$ は分離多項式である．

(　　) $\mathbb{F}_3$ の 3 次拡大はすべて非分離拡大である．

(　　) 標数 0 の体の代数拡大はすべて分離拡大である．

(　　) 標数 0 の体 K 上の任意の有限次拡大体 L に対して，$L = K(\alpha)$ をみたす $\alpha \in L$ が存在する．

(　　) 代数拡大 L/K が分離的ならば，L/K の任意の中間体 M に対して，L/M, M/K はどちらも分離的である．

代数II　小テスト　2019–11–27

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．

(○) K が標数 $p>0$ の体ならば，任意の $a,b\in K$ に対して $(a+b)^p=a^p+b^p$ が成り立つ．

【解説】　$(a+b)^p=\displaystyle\sum_{j=0}^{p} {}_pC_j a^{p-j}b^j$ であるが，$j=0,p$ でなければ ${}_pC_j\equiv 0 \pmod p$ だから $(a+b)^p=a^p+b^p$．

(○) p を素数とすると，任意の $a\in\mathbb{F}_p$ に対して $a^p=a$ が成り立つ．

【解説】　フェルマーの定理から直ちにわかる．

(×) $\mathbb{F}_7$ 上の多項式 X^7+5 は分離多項式である．

【解説】　前問，前々問より $(X+5)^7=X^7+5^7=X^7+5$ だから重根をもつ．

(○) 標数 $p>0$ の体 K 上の既約多項式 $f(X)$ が重根をもつならば，$\deg f(X)$ は p の倍数である．

【解説】　K 上の非分離既約多項式は，ある $g(X)\in K[X]$ を用いて，$g(X^p)$ と表されるから，その次数は p の倍数である．

(×) 標数 $p>0$ の体 K の有限次拡大体 L が分離的でないならば，$[L:K]$ は p で割り切れない．

【解説】　仮定より，K 上分離的でない $\alpha\in L$ が存在する． $f(X)$ を α の K 上の最小多項式とすると，前問より $\deg f(X)$ は p の倍数だから，$[K(\alpha):K]=\deg f(X)\equiv 0 \pmod p$． よって $[L:K]$ も p の倍数である．

(○) 標数 $p>0$ の体上の多項式 X^p-X+1 は分離多項式である．

【解説】　$f(X)=X^p-X+1$ とおき，α をその任意の根とする． もし α が $f(X)$ の重根ならば $f'(\alpha)=0$ が成り立つはずだが，$f'(X)=pX^{p-1}-1=-1$ より，このようなことは起こらない． すなわち $f(X)$ は重根をもたず，分離多項式である．

(×) $\mathbb{F}_3$ の 3 次拡大はすべて非分離拡大である．

【解説】　前問において $p = 3$ として，$f(X) = X^3 - X + 1$ を $\mathbb{F}_3$ 上の多項式と考える．前問より $f(X)$ は分離的であり，さらに $f(0) = f(1) = f(2) = 1 \neq 0$ だから，$f(X)$ は一次因子をもたず，したがって $\mathbb{F}_3$ 上既約である．よって α を $f(X)$ の根とすると，$\mathbb{F}_3(\alpha)/\mathbb{F}_3$ は 3 次分離拡大である（分離性については，ちょっとギャップがあるので講義で補足説明する予定）．

(○) 標数 0 の体の代数拡大はすべて分離拡大である．

【解説】　標数 0 の体上の既約多項式は分離的であることからわかる．

(○) 標数 0 の体 K 上の任意の有限次拡大体 L に対して，$L = K(\alpha)$ をみたす $\alpha \in L$ が存在する．

【解説】　標数 0 なので，前問より L/K は有限次分離拡大，したがって単純拡大である．

(○) 代数拡大 L/K が分離的ならば，L/K の任意の中間体 M に対して，L/M, M/K はどちらも分離的である．

【解説】　M/K が分離的であることは明らかだから，L/M の分離性を示す．$\alpha \in L$ を任意にとる．仮定より，α の K 上の最小多項式 $f(X)$ は重根をもたない．ここで，α の M 上の最小多項式は $f(X)$ の因子だから，やはり重根をもたない．したがって α は M 上分離的である．