代数II　小テスト　2019–12–04

学年	学 籍 番 号	氏　　名

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．

(　　) $X^4 - 5X^2 + 6$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体は $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ である．

(　　) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-2})$ は $X^4 + 1$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体である．

(　　) 任意の体の任意の 2 次拡大は正規拡大である．

(　　) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})/\mathbb{Q}$ は正規拡大である．

(　　) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \sqrt{-3})$ は $\mathbb{Q}$ 上の正規拡大体である．

(　　) $\zeta \in \mathbb{C}$ を 1 の原始 5 乗根とし $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ とすると，$\alpha^5 \in K$ をみたす任意の $\alpha \in \overline{K}$ について，$K(\alpha)/K$ は正規拡大である．

(　　) 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ と $\alpha \in \overline{K}$ に対して，$\sigma^n(\alpha) = \alpha$ をみたす自然数 n が存在する．

(　　) $\alpha \in \overline{K}$ とする． $K(\alpha)/K$ が正規拡大ならば，任意の $\beta \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ について $K(\alpha) = K(\beta)$ である．

(　　) 体の拡大 L/K が正規拡大ならば，任意の中間体 M について，L/M, M/K はともに正規拡大である．

(　　) M を体の拡大 L/K の中間体とするとき，L/M, M/K がともに正規拡大ならば L/K も正規拡大である．

代数II　小テスト　2019–12–04

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．ただし，$\overline{K}$ は 体 K の代数的閉包である．

(×) $X^4 - 5X^2 + 6$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体は $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ である．
【解説】　$X^4 - 5X^2 + 6 = (X^2 - 2)(X^2 - 3)$ だから，最小分解体は $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ であって……．

(○) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-2})$ は $X^4 + 1$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体である．
【解説】　X^4+1 の 4 つの根は，絶対値 1 で偏角 $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$ の複素数，すなわち $(\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{-2})/2$（復号任意）で与えられる．これらすべてを $\mathbb{Q}$ の添加して……．

(○) 任意の体の任意の 2 次拡大はつねに正規拡大である．
【解説】　L/K を 2 次拡大とする．$\alpha \in L$ とその K 上の共役元 $\beta \in \overline{K}$ を任意にとる．$\alpha \neq \beta$ ならば α の K 上の最小多項式は 2 次式であり，それを $X^2 + bX + c$ とすると，$\alpha + \beta = -b \in K \subset L$，したがって $\beta = -b - \alpha \in L$.

(×) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})/\mathbb{Q}$ は正規拡大である．
【解説】　$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ とすると，$\omega\sqrt[3]{7}$ は $\sqrt[3]{7}$ の $\mathbb{Q}$ 上の共役元であるが，$\omega\sqrt[3]{7} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$.

(○) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \sqrt{-3})$ は $\mathbb{Q}$ 上の正規拡大体である．
【解説】　前問のように ω をとり $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \omega)$ とおくと，L は $X^3 - 7$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体なので，$L/\mathbb{Q}$ は正規拡大．さらに，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ だから $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \sqrt{-3})$.

(○) $\zeta \in \mathbb{C}$ を 1 の原始 5 乗根とし $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ とすると，$\alpha^5 \in K$ をみたす任意の $\alpha \in \overline{K}$ について，$K(\alpha)/K$ は正規拡大である．
【解説】　$a = \alpha^5$ とおけば，$f(X) = X^5 - a$ は K 上の多項式で，その 5 根は $\alpha, \alpha\zeta, \alpha\zeta^2, \alpha\zeta^3, \alpha\zeta^4$．さらに $\zeta \in K$ より，$K(\alpha)$ は $f(X)$ の K 上の最小分解体であり，したがって K 上正規である．

(○) 任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ と $\alpha \in \overline{K}$ に対して，$\sigma^n(\alpha) = \alpha$ をみたす自然数 n が存在する．

【解説】　すべての $j \in \mathbb{N}$ について $\sigma^j(\alpha)$ と α は K 上共役，すなわち $\sigma^j(\alpha) \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ であるが，$\mathrm{Conj}(\alpha, K)$ は有限集合だから，ある自然数 $j < k$ について $\sigma^j(\alpha) = \sigma^k(\alpha)$．これから $\sigma^{k-j}(\alpha) = \alpha$ を導くのは難しくない．

(○) $\alpha \in \overline{K}$ とする．$K(\alpha)/K$ が正規拡大ならば，任意の $\beta \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ について $K(\alpha) = K(\beta)$ である．

【解説】　$K(\alpha)/K$ が正規なので，α と K 上共役なすべての β について $\beta \in K(\alpha)$，よって $K(\beta) \subset K(\alpha)$．一方，$[K(\alpha) : K] = [K(\beta) : K]$ より，$K(\alpha) = K(\beta)$．

(×) 体の拡大 L/K が正規拡大ならば，任意の中間体 M について，L/M，M/K はともに正規拡大である．

【解説】　一般に L/K が正規ならば L/M は正規であるが，M/K は正規であるとは限らない．反例としては，今回の小テストの 4, 5 問目．

(×) M を体の拡大 L/K の中間体とするとき，L/M, M/K がともに正規拡大ならば L/K も正規拡大である．

【解説】　$M = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $L = M(\sqrt{1+\sqrt{2}})$ とすると，$M/\mathbb{Q}$, L/M はともに 2 次拡大だから正規である（今回の小テストの 3 問目）．一方，$\sqrt{1-\sqrt{2}}$ は $\mathbb{Q}$ 上 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ の共役元だが L には属さない（だって，$L \subset \mathbb{R}$ だけど $\sqrt{1-\sqrt{2}} \notin \mathbb{R}$ だもん）．したがって $L/\mathbb{Q}$ は正規ではない．