

## §4. 代数拡大

**定義 4.1**  $L/K$  を体の拡大とする.  $L$  の任意の元が  $K$  上代数的であるとき,  $L$  は  $K$  上代数的であるという. また,  $L/K$  を**代数拡大**という.  $L$  が  $K$  上代数的でないとき,  $L$  は  $K$  上**超越的**であるといい,  $L/K$  を**超越拡大**という.

**命題 4.2** 有限次拡大は代数拡大である. とくに,  $\alpha$  が  $K$  上代数的ならば  $K(\alpha)/K$  は代数拡大である.

**証明** (補題 3.5 と同様に証明できるが, 念のため……)  $L/K$  が有限次で  $n = [L : K]$  とすると, 任意の  $\beta \in L$  に対して,  $n+1$  個の元  $1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^n$  は  $K$  上 1 次従属, よって (どれかは 0 ではない)  $c_i \in K$  が存在して

$$c_0 + c_1\beta + c_2\beta^2 + \dots + c_n\beta^n = 0$$

が成り立つ. このとき,  $f(X) = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \dots + c_nX^n$  と定めれば,  $f(X)$  は  $\beta$  を根にもつ零でない  $K$  上の多項式だから,  $\beta$  は  $K$  上代数的である. 後半は定理 3.6 からわかる.  $\square$

**命題 4.3** 体の拡大  $L/K$  に対して次は同値である.

- (i)  $L/K$  は有限次拡大である.
- (ii)  $K$  上代数的な有限個の元  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$  が存在して,  $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  が成り立つ.

**証明** (i) のとき, ベクトル空間としての  $L$  の  $K$  上の基底  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  をとれば, 前命題よりこれらはすべて  $K$  上代数的であり, (ii) が導かれる. 逆に, (ii) のときは,

$$K_0 = K, \quad K_1 = K_0(\alpha_1), \quad K_2 = K_1(\alpha_2), \quad \dots, \quad K_n = K_{n-1}(\alpha_n)$$

とおけば, 各  $i = 1, \dots, n$  について,  $\alpha_i$  は  $K_{i-1}$  上代数的だから, 定理 3.6 より  $K_i/K_{i-1}$  は有限次, したがって  $L = K_n$  は  $K$  上有限次であることが導かれ, (i) を得る.  $\square$

**定理 4.4**  $M$  を体の拡大  $L/K$  の中間体とするとき, 次は同値である.

- (i)  $L/K$  は代数拡大である.
- (ii)  $L/M, M/K$  はともに代数拡大である.

**証明** (i)ならば(ii)が成り立つのはあきらかなので、以下、(ii)を仮定して(i)を導く。そのために、任意の $\alpha \in L$ が $K$ 上代数的であることを確かめる。(ii)より $L/M$ は代数的だから、 $\alpha$ は $M$ 上代数的、したがって、 $\alpha$ を根とする $M$ 上の零でない多項式

$$g(X) = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \quad (c_i \in M)$$

が存在する。いま、 $M_0 = K(c_0, c_1, \dots, c_n)$ とおくと、 $\alpha$ は $M_0$ 上代数的であるから、定理3.6より $M_0(\alpha)/M_0$ は有限次である。一方、仮定(ii)より $M/K$ も代数的なので $c_i$ は $K$ 上代数的、よって、前命題より $M_0/K$ は有限次である。したがって $M_0(\alpha)/K$ は有限次拡大であり、命題4.2から代数拡大でもある。とくに $\alpha$ は $K$ 上代数的である。□

**例 4.5** 自然数 $n$ に対して、 $z^n = 1$ をみたす複素数全体を $W_n$ とする；

$$W_n = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}.$$

いま、

$$\zeta_n = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{n}$$

とおけば、 $W_n = \{\zeta_n^j \mid j = 0, 1, \dots, n-1\}$ と具体的にかき、これが $X^n - 1$ の根全体の集合と一致する。よって、命題4.3より $\mathbf{Q}(W_n)/\mathbf{Q}$ は有限次、したがって、命題4.2より代数拡大である（実際には、 $\mathbf{Q}(W_n) = \mathbf{Q}(\zeta_n)$ が成り立っているのので、命題4.3は必要ない）。とくに $n$ が素数 $p$ の場合、 $\zeta_p$ は $X^p - 1$ の既約因子 $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ の根だから、定理3.7より、

$$[\mathbf{Q}(W_p) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\zeta_p) : \mathbf{Q}] = p - 1.$$

この等式は、任意の自然数 $n$ に対して、オイラー関数 $\varphi$ を用いた等式

$$[\mathbf{Q}(W_n) : \mathbf{Q}] = [\mathbf{Q}(\zeta_n) : \mathbf{Q}] = \varphi(n)$$

に拡張されるが、証明は少し難しい。

**補題 4.6**  $L/K$ を体の拡大とし、 $A \subset L$ とすると、 $K(A)$ は $A$ の有限部分集合 $B$ のすべてを走らせることにより

$$K(A) = \bigcup_B K(B)$$

と表される。すなわち、任意の $\alpha \in K(A)$ に対して、 $\alpha \in K(\beta_1, \dots, \beta_n)$ であるような有限個の $\beta_1, \dots, \beta_n \in A$ がとれる。

**証明**  $M = \bigcup_B K(B)$  とおく. あきらかに  $K \subset M$  であり, また  $A \subset M$  もすぐに分かる. さらに,  $A$  の任意の有限部分集合  $B$  に対して  $K(B) \subset K(A)$  だから,  $M \subset K(A)$ . よって, 補題を示すためには,  $M$  が体であることを確かめればよい. いま,  $M$  の任意の元  $\beta, \gamma \neq 0$  に対して,  $\beta \in K(B)$ ,  $\gamma \in K(C)$  をみたす  $A$  の有限部分集合  $B, C$  がとれる.  $D = B \cup C$  とおけば, これも  $A$  の有限部分集合であって  $\beta, \gamma \in K(D)$  であるが,  $K(D)$  は体なので,  $\beta, \gamma$  の和, 差, 積, 商は  $K(D)$  に属する. さらに  $K(D) \subset M$  なので, これらは  $M$  に属する. よって,  $M$  は体である.  $\square$

**定理 4.7**  $L/K$  を体の拡大とし,  $A \subset L$  とする.  $A$  の任意の元が  $K$  上代数的ならば  $K(A)/K$  は代数拡大である.

**証明** 任意の  $\alpha \in K(A)$  に対して, 前補題から,  $\alpha \in K(\beta_1, \dots, \beta_n)$  をみたす  $\beta_i \in A$  がとれる. 仮定より  $\beta_i$  は  $K$  上代数的だから, 拡大  $K(\beta_1, \dots, \beta_n)/K$  は, 命題 4.3 より有限次, よって命題 4.2 より代数的, とくに  $\alpha$  は  $K$  上代数的である.  $\square$

**系 4.8**  $L/K$  を体の拡大とする.  $\alpha, \beta \in L$  ( $\beta \neq 0$ ) がともに  $K$  上代数的ならば, それらの和と差  $\alpha \pm \beta$ , 積  $\alpha\beta$ , 商  $\alpha/\beta$  はどれも  $K$  上代数的である.

**証明** 前定理より  $K(\alpha, \beta)$  は  $K$  上代数的であり,  $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta \in K(\alpha, \beta)$  だから結論を得る.  $\square$

**例 4.9** 複素数平面における単位円を  $S$  とする. また, ある自然数  $n$  に対して,  $z^n = 1$  をみたす複素数全体を  $W$  で表す.

$$S = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\} = \{x + iy \in \mathbf{C} \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1\},$$

$$W = \{z \in \mathbf{C} \mid \exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } z^n = 1\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n.$$

すべての  $n \in \mathbf{N}$  について,  $\mathbf{Q}(W_n) \subset \mathbf{Q}(W) \subset \mathbf{Q}(S)$ . ここで, 以下が成り立つ.

- (1)  $\mathbf{Q}(W)/\mathbf{Q}$  は有限次ではない代数拡大である.
- (2)  $\mathbf{Q}(S)/\mathbf{Q}$  は超越拡大である.

(1) は, 定理 4.7 および例 4.5 から容易に証明できる. (2) の証明法はいくつかあるが, どれも簡単ではない.

**命題 4.10**  $L/K$  を体の拡大とし,  $M$  をその中間体とする.  $\alpha \in L$  が  $K$  上代数的であるとき,

$$[M(\alpha) : M] \leq [K(\alpha) : K]$$

が成り立つ.

**証明**  $\alpha$  の  $K$  上の最小多項式を  $f(X)$  とすると,  $\deg f = [K(\alpha) : K]$ . 一方,  $f(X)$  は  $M$  上の多項式でもあるから, 補題 3.4 より,  $[M(\alpha) : M] \leq \deg f$  であり, 求める不等式を得る.  $\square$

**例 4.11**  $X^3 - 1$  の 1 でない根のひとつを  $\omega$  とする (1 の原始 3 乗根). このとき,  $\omega, \omega^2$  は  $X^2 + X + 1$  の 2 根である.  $X^3 - 2$  の実根を  $\alpha$  とすれば, 他の根は  $\alpha\omega, \alpha\omega^2$  で与えられる.  $X^3 - 2$  は  $\mathbb{Q}$  上既約だから, 定理 3.7 より  $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$  は 3 次拡大である. このとき,

(a)  $M = \mathbb{Q}(\omega)$  とおけば,  $[M(\alpha) : M] = 3 = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ ,

(b)  $L = \mathbb{Q}(\alpha\omega)$  とおけば,  $[L(\alpha) : L] = 2 < 3 = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$

が成り立ち, それぞれ, 前命題において, 等号が成り立つ例, 成り立たない例となっている.

**定義 4.12**  $\Omega/K$  を体の拡大とし,  $L, M$  をその中間体とするとき,  $L, M$  をともに含む  $\Omega$  の最小の部分体を  $L, M$  の**合成体**といい  $LM$  で表す. すなわち,  $LM = L(M) = M(L)$  である.

**定理 4.13**  $L, M$  が体の拡大  $\Omega/K$  の中間体で,  $L/K$  が有限次拡大ならば

$$[LM : M] \leq [L : K]$$

が成り立つ.

**証明** 命題 4.3 より,  $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  をみたす  $K$  上代数的な元  $\alpha_i$  がとれる.

$$K_0 = K, \quad K_1 = K_0(\alpha_1), \quad K_2 = K_1(\alpha_2), \quad \dots, \quad K_n = K_{n-1}(\alpha_n)$$

$$M_0 = M, \quad M_1 = M_0(\alpha_1), \quad M_2 = M_1(\alpha_2), \quad \dots, \quad M_n = M_{n-1}(\alpha_n)$$

とおくと, 命題 4.10 より  $[M_i : M_{i-1}] \leq [K_i : K_{i-1}]$ . さらに,  $L = K_n$  かつ  $LM = M_n$  だから,

$$[LM : M] = [M_n : M_{n-1}] \cdots [M_1 : M_0] \leq [K_n : K_{n-1}] \cdots [K_1 : K_0] = [L : K]$$

が導かれる.  $\square$