§6. 代数的閉体と共役元

定義 6.1 体 L の代数拡大体が L のみであるとき，L を**代数的閉体**という．

つまり，L が代数的閉体であるとは，L のどんな拡大体 M をとっても,『$\alpha \in M$ が L 上代数的ならば $\alpha \in L$』 となることである．

例 6.2 (1) $\boldsymbol{C}$ は代数的閉体である（代数学の基本定理）．
(2) $\boldsymbol{R}$ は代数的閉体ではない．

定理 6.3 体 L に対して次は同値である．

(i) L は代数的閉体である．
(ii) L 上の既約多項式はすべて 1 次式である．
(iii) L 上の定数でない任意の多項式は L 上の 1 次式の積に分解される．
(iv) L 上の定数でない任意の多項式は L で根を持つ．

証明 <u>(i)⇒(ii):</u> $f(X)$ を L 上の既約多項式とする． クロネッカーの定理（定理 5.6）より，L の拡大体 M と $\alpha \in M$ で $f(\alpha) = 0$ をみたすものがとれるが，仮定より $\alpha \in L$ であるから，$\deg f = [L(\alpha) : L] = 1$ を得る．
<u>(ii)⇒(iii):</u> L 上の定数でない任意の多項式は既約多項式の積に分解されるから，仮定より (iii) が導かれる．
<u>(iii)⇒(iv):</u> あきらか．
<u>(iv)⇒(i):</u> M/L を代数拡大とするとき，任意の $\alpha \in M$ に対して，$\alpha \in L$ であることを確かめればよい． いま，α の L 上の最小多項式を $f(X)$ とすると，仮定より，$f(X)$ は根 $\beta \in L$ を持つ． 一方，定理 5.9 より $L(\alpha)$ と $L(\beta)$ は L 上同型であり，とくに L 上の次数は等しいから $[L(\alpha) : L] = [L(\beta) : L] = 1$，ゆえに $L(\alpha) = L$，すなわち $\alpha \in L$ でなければならない． $\square$

定義 6.4 体 K の代数拡大体であって代数的閉体であるものを K の**代数的閉包**という．

定理 6.5 Ω が代数的閉体ならば，Ω に含まれる任意の部分体に対して，その代数的閉包が Ω の中に一意的に存在する．

証明　（存在すること）K を Ω の任意の部分体とする．K 上代数的な Ω の元全体

$$L = \{\, \alpha \in \Omega \,|\, \alpha \text{ は } K \text{ 上代数的} \,\}$$

は K の代数拡大体である．なぜなら，定理 4.7 より $K(L)/K$ は代数的であり，したがって L の定義から $K(L) \subset L$ となり，結局 $L = K(L)$ が得られるからである．以下，L が代数的閉体であることを示す．$f(X)$ を L 上の定数でない任意の多項式とする．$f(X)$ は Ω 上の多項式でもあるが，Ω が代数的閉体であるという仮定から，定理 6.3 より，$f(\alpha) = 0$ である $\alpha \in \Omega$ がとれる．また，$f(\alpha) = 0$ より α は L 上代数的であるが，L/K が代数拡大であることに注意すれば，α は K 上代数的でもある（定理 4.4 参照）．よって L の定義から，$\alpha \in L$ であり，再び定理 6.3 より，L が代数的閉体であることが導かれる．
（一意性）Ω の部分体 L_1, L_2 がどちらも K 上の代数的閉包であるとする．任意の $\alpha \in L_1$ に対して，α は K 上代数的だから，もちろん L_2 上も代数的だが，L_2 は代数的閉体なので $\alpha \in L_2$．したがって $L_1 \subset L_2$．役割を入れ替えれば $L_2 \subset L_1$ も導かれ，$L_1 = L_2$ が得られた．　□

例 6.6　(1)　$\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{R}$ の代数的閉包である．
(2)　$\boldsymbol{Q}$ の代数的閉包は $\boldsymbol{C}$ の中で一意的に定まるが，それは $\boldsymbol{C}$ ではない．
(3)　L が K の代数的閉包ならば，L/K の任意の中間体 M は K 上の代数拡大体であり，さらに L は M の代数的閉包でもある．

定理 6.7（シュタイニッツ）　任意の体 K に対してその代数的閉包が存在する．さらに，L_1, L_2 がどちらも体 K の代数的閉包ならば，K 上の同型写像 $L_1 \to L_2$ が存在する．

証明は**選出公理**（またはそれと同値な**ツォルンの補題**，**整列可能定理**など）を用いてなされるが，ちょいと面倒なので証略，いや省略する．

以下で扱う体は，とくにことわらない限り，すべてある一つの代数的閉体に含まれているとする．したがって，定理 6.5 より，体 K に対してその中で代数的閉包が一意的に定まる．それを $\overline{K}$ で表す．このとき，**K 上の代数拡大体はすべて $\overline{K}/K$ の中間体**と考えてよい．実際，M/K が代数拡大ならば，M の任意の元は $\overline{K}$ 上代数的だから，定理 4.7 より，$\overline{K}(M)$ は $\overline{K}$ 上代数的である．よって代数的閉体の定義から $\overline{K}(M) = \overline{K}$，ゆえに $M \subset \overline{K}$ となる．また，このとき $\overline{K}$ は M の代数的閉包，すなわち $\overline{M} = \overline{K}$ が成り立つ（例 6.6 (3) を参照）．

定義 6.8　体の拡大 L/K に対して，L から L への K 上の同型写像を，L の K 上の**自己同型写像**，または L/K の自己同型写像という． また，それら全体の集合を $\mathrm{Aut}(L/K)$ で表し，L の K 上の**自己同型群**，または L/K の自己同型群という;

$$\mathrm{Aut}(L/K) = \{\, \sigma \mid \sigma : L \to L, \quad K \text{ 上の同型写像 } \}.$$

定理 6.9　L が $\overline{K}/K$ の中間体，すなわち L が体 K 上の代数拡大体で，

$$\tau : L \longrightarrow \overline{K}$$

が K 上の準同型写像であるとする． このとき，τ の延長 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が存在する． すなわち，K 上の同型写像

$$\sigma : \overline{K} \longrightarrow \overline{K}$$

で，任意の $a \in L$ に対して $\sigma(a) = \tau(a)$ であるものがとれる．

この証明も，ふつう**ツォルンの補題**を使って行われる． やはり少し面倒なので省略する．

定義 6.10　K を体とする． $\alpha, \beta \in \overline{K}$ それぞれの K 上の最小多項式が一致するとき，α, β は K 上**共役**であるという． また，β を α の K 上の**共役元**ともいう． α の K 上の共役元全体の集合を $\mathrm{Conj}(\alpha, K)$ で表す． 言い換えると，α の K 上の最小多項式の根全体の集合が $\mathrm{Conj}(\alpha, K)$ である．

例 6.11　$z \in \boldsymbol{C}$ の複素共役 $\bar{z}$ は，z の $\boldsymbol{R}$ 上の共役元であり，$\mathrm{Conj}(z, \boldsymbol{R}) = \{z, \bar{z}\}$ が成り立つ．

定理 6.12　体 K と $\alpha \in \overline{K}$ に対して次が成り立つ．

(1)　任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して，$\sigma(\alpha)$ は α と K 上共役である．

(2)　$\beta \in K$ が α と K 上共役ならば，$\sigma(\alpha) = \beta$ をみたす $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が存在する．

証明　(1)　$f(X)$ を α の K 上の最小多項式とすれば，

$$f(\beta) = f(\sigma(\alpha)) = \sigma(f(\alpha)) = 0,$$

よって β は α と K 上共役である．
(2)　α, β が K 上共役ならば，定理 5.9 より，K 上の同型写像

$$\tau : K(\alpha) \longrightarrow K(\beta) \subset \overline{K}$$

で $\tau(\alpha) = \beta$ であるものが存在する． そこで，定理 6.9 を適用すればよい．　□

系 6.13　体 K と $\alpha \in \overline{K}$ に対して，

$$\mathrm{Conj}(\alpha, K) = \left\{ \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K) \right\}$$

が成り立つ．

定理 6.14　体 K と $\alpha \in \overline{K}$ に対して，

$$|\mathrm{Aut}(K(\alpha)/K)| \leq |\mathrm{Conj}(\alpha, K)| \leq [K(\alpha) : K]$$

が成り立つ．

証明　$\sigma \in \mathrm{Aut}(K(\alpha)/K)$ に対して $\sigma(\alpha) \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ を対応させることにより，単射

$$\mathrm{Aut}(K(\alpha)/K) \longrightarrow \mathrm{Conj}(\alpha, K)$$

が定まり，前半の不等式が導かれる． 次に，$f(X)$ を α の K 上の最小多項式とすると，

$$|\mathrm{Conj}(\alpha, K)| = \text{“}f(X) \text{ の根の個数”} \leq \deg f = [K(\alpha) : K]$$

を得る． □

注意　“$f(X)$ の根の個数” $\leq \deg f$ としたのは，$f(X)$ が重根を持つ可能性があるからである． 重根を持たない場合，根の個数は次数と一致する．

例 6.15　$\sqrt{2}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は $X^2 - 2$，したがって

$$\mathrm{Conj}(\sqrt{2}, \boldsymbol{Q}) = \{ \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}.$$

また，$\sigma \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})/\boldsymbol{Q})$ とすると，$\sigma(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$． 符号のとり方により，$\sigma = \mathrm{id}$（恒等写像）または $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ となるから，後者をあらためて σ と定めれば，

$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})/\boldsymbol{Q}) = \{ \mathrm{id}, \sigma \}$$

となる．よって，定理 6.14 の不等式はすべて等号になっている．

例 6.16　$X^3 - 2$ の実根 $\alpha = \sqrt[3]{2}$ と他の根 $\alpha\omega$, $\alpha\omega^2$ について，

$$\mathrm{Conj}(\alpha, \boldsymbol{Q}) = \left\{ \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2 \right\}.$$

一方，同型写像 $\boldsymbol{Q}(\alpha) \to \boldsymbol{Q}(\alpha)$ によって α は α にしか写らないから

$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q}) = \{ \mathrm{id} \}.$$

よって，この場合は定理 6.14 の左の不等号は $1 < 3$ となっていて，等号ではない．