代 数 II

2022 年度版

中野　伸

（学習院大学・理学部・数学科）

目 次

中野　伸　<shin.nakano@gakushuin.ac.jp>

§1. 2次, 3次, 4次方程式の解の公式

定理 1.1 2次方程式

$$X^2 + bX + c = 0$$

の解は，$b^2 - 4c$ の平方根をひとつ固定し，それを R とするとき，

$$\frac{-b+R}{2}, \qquad \frac{-b-R}{2}$$

で与えられる．

証明 解を α, β とすれば，解と係数の関係から，$\alpha + \beta = -b$, $\alpha\beta = c$. よって，

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 - 4c$$

そこで，この平方根のひとつを R とし，α, β に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -b \\ \alpha - \beta = R \end{cases}$$

を解けばよい. □

定理 1.2 3次方程式

$$X^3 + bX^2 + cX + d = 0$$

の解は，Y に関する2次方程式

$$Y^2 + (2b^3 - 9bc + 27d)Y + (b^2 - 3c)^3 = 0$$

の2解それぞれの3乗根 R, S を，$RS = b^2 - 3c$ を満たすように一組固定するとき，

$$\frac{-b+R+S}{3}, \qquad \frac{-b+\omega^2 R+\omega S}{3}, \qquad \frac{-b+\omega R+\omega^2 S}{3}$$

で与えられる． ここで，ω は1の原始3乗根

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

である．

証明　3つの解を α, β, γ とし，

$$\begin{aligned} Q &= \alpha + \beta + \gamma, \\ R &= \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma, \\ S &= \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma \end{aligned}$$

とおく． Q, R, S が求まれば，上の式を α, β, γ に関する連立方程式とみなして解けばよい． さて，解と係数の関係から $Q = -b$ だが，

$$R^3 + S^3 = -2b^3 + 9bc - 27d, \qquad RS = b^2 - 3c$$

も，ちょっとがんばればわかる． したがって，R^3, S^3 は定理にある Y に関する 2 次方程式の解である． R, S は，これらの 3 乗根として求まり，定理の主張が導かれる． □

定理 1.3　4 次方程式

$$X^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e = 0$$

の解は，Y に関する 3 次方程式

$$Y^3 - (3b^2 - 8c)Y^2 + (3b^4 - 16b^2c + 16c^2 + 16bd - 64e)Y - (b^3 - 4bc + 8d)^2 = 0$$

の 3 解それぞれの平方根 R, S, T を，$RST = -b^3 + 4bc - 8d$ を満たすように一組固定するとき，

$$\frac{-b + R + S + T}{4}, \quad \frac{-b + R - S - T}{4}, \quad \frac{-b - R + S - T}{4}, \quad \frac{-b - R - S + T}{4}$$

で与えられる．

証明　$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を 4 つの解として

$$\begin{aligned} Q &= \alpha + \beta + \gamma + \delta, \\ R &= \alpha + \beta - \gamma - \delta, \\ S &= \alpha - \beta + \gamma - \delta, \\ T &= \alpha - \beta - \gamma + \delta \end{aligned}$$

とおく． Q, R, S, T が求まれば，上の式を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ に関する連立方程式とみなして解けばよい． 解と係数の関係から $Q = -b$ だが，

$$\begin{aligned} R^2 + S^2 + T^2 &= 3b^2 - 8c, \\ R^2S^2 + S^2T^2 + T^2R^2 &= 3b^4 - 16b^2c + 16c^2 + 16bd - 64e, \\ RST &= -b^3 + 4bc - 8d \end{aligned}$$

も，うんとがんばって計算すれば得られる． したがって，R^2, S^2, T^2 は定理にある Y に関する 3 次方程式の解である． R, S, T は，これらの平方根として求まり，定理の主張が導かれる． □

定義 1.4　n 個の不定元 (変数) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は，任意の $\sigma \in S_n$ に対して

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

が成り立つとき，**対称式**であるという（正確には $x_1, \ldots, x_n$ の対称式という）.

定義 1.5　n 個の不定元 (変数) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，

$$(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$$

を展開した式

$$X^n - s_1 X^{n-1} + s_2 X^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1} X + (-1)^n s_n$$

によって定まる $s_1, \ldots, s_n$ を，$x_1, \ldots, x_n$ の**基本対称式**という．とくに，s_j を j 次の基本対称式という.

例 1.6　基本対称式は対称式である.

$n = 2$ のとき
$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 \\ s_2 = x_1 x_2 \end{cases}$$

$n = 3$ のとき
$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ s_3 = x_1 x_2 x_3 \end{cases}$$

$n = 4$ のとき
$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 \\ s_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \\ s_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 \end{cases}$$

定理 1.7 (対称式の基本定理)　$x_1, \ldots, x_n$ の任意の対称式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ に対して，ある n 変数多項式 $G(X_1, \ldots, X_n)$ が存在して，

$$f(x_1, \ldots, x_n) = G(s_1, \ldots, s_n)$$

が成り立つ．すなわち，任意の対称式は基本対称式の多項式として表すことができる.

例 1.8　証明は，難しいことは使わないが煩雑なので省略する．以下に例を挙げて証明の代わりとする．

(1) $f(x,y)=x^4+y^4$ を x,y の基本対対称式

$$s=x+y,\quad t=xy$$

の多項式として表す.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4+y^4 \\ f(x,y)-s^4 &= -4x^3y-6x^2y^2-4xy^3 \\ f(x,y)-s^4+4s^2t &= 2x^2y^2 \\ f(x,y)-s^4+4s^2t-2t^2 &= 0 \end{aligned}$$

よって，$f(x,y)=s^4-4s^2t+2t^2$.

(2) $g(x,y,z)=x^3(y+z)+y^3(z+x)+z^3(x+y)$ を x,y,z の基本対称式

$$s=x+y+z,\quad t=xy+yz+zx,\quad u=xyz$$

の多項式で表す.

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^3y+x^3z+xy^3+xz^3+y^3z+z^3y \\ g(x,y,z)-s^2t &= -2x^2y^2-5x^2yz-2x^2z^2-5xy^2z-5xyz^2-2y^2z^2 \\ g(x,y,z)-s^2t+2t^2 &= -x^2yz-xy^2z-xyz^2 \\ g(x,y,z)-s^2t+2t^2+su &= 0 \end{aligned}$$

ゆえ，$g(x,y,z)=s^2t-2t^2-su$.

§2. 体の拡大，拡大次数

定義 2.1 体 K が体 L の部分体，つまり

$$K \subset L$$

のとき，L を K の**拡大体**という．このとき，体の**拡大** L/K ということが多い．また，M が K の拡大体で，かつ L が M の拡大体，つまり

$$K \subset M \subset L$$

であるとき，M を拡大 L/K の**中間体**という．

定義 2.2 L/K を体の拡大とする．

(1) L の部分集合 A に対して，A を含む最小の L/K の中間体を $K(A)$ と表し，K **に** A **を添加した体**という．

(2) とくに A が有限集合で $A = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ のとき，$K(A)$ を $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ と略記する．

(3) ただひとつの $\alpha \in L$ により $K(\alpha)$ と表される体を K の**単純拡大体**という．この場合，α を拡大 $K(\alpha)/K$ の**原始元**という．

命題 2.3 L/K を体の拡大とする．$\alpha \in L$ に対して，$K(\alpha)$ は K 上 α で生成される可換環（すなわち，K と α を含む L の最小の部分環）

$$K[\alpha] = \left\{ \, g(\alpha) \;\middle|\; g(X) \in K[X] \, \right\}$$

の商体である．したがって

$$K(\alpha) = \left\{ \, \frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} \;\middle|\; g(X), h(X) \in K[X],\ h(\alpha) \neq 0 \, \right\}$$

が成り立つ．

証明 $K(\alpha)$ は K と α を含む体だから，$g(X), h(X) \in K[X]$ とすると $g(\alpha), h(\alpha) \in K(\alpha)$，さらに $h(\alpha) \neq 0$ であれば $g(\alpha)/h(\alpha) \in K(\alpha)$．一方，

$$\left\{ \, \frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} \;\middle|\; g(X), h(X) \in K[X],\ h(\alpha) \neq 0 \, \right\}$$

は L の部分体なので，$K(\alpha)$ の最小性から命題の主張は正しいことがわかる． □

例 2.4　有理数体 $\boldsymbol{Q}$ の拡大体について，いくつかの例をあげる．

(1) $\boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{2}\Big) = \boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{2}-1\Big) = \boldsymbol{Q}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boldsymbol{Q}\left(\dfrac{1+3\sqrt{2}}{5-7\sqrt{2}}\right)$

最初の等号は，

$\sqrt{2}-1 \in \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ だから $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}-1) \subset \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$,
$\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)+1 \in \boldsymbol{Q}(\sqrt{2}-1)$ だから $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}) \subset \boldsymbol{Q}(\sqrt{2}-1)$

よりわかる．真ん中の等号はどうよ？　最後の等号は，

$$\alpha = \frac{1+3\sqrt{2}}{5-7\sqrt{2}} \quad \text{とおけば} \quad \sqrt{2} = \frac{5\alpha-1}{7\alpha+3} \in \boldsymbol{Q}(\alpha)$$

となることを使えばわかるはず．

(2) $\boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{2},\sqrt{3}\Big) = \boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{2}+\sqrt{3}\Big) = \boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{2}-\sqrt{3}\Big)$

$\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \boldsymbol{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ より $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \subset \boldsymbol{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ はＯＫ．一方，$\beta = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ とおけば，$\dfrac{1}{\beta} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ が成り立ち，

$$\boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{2}+\sqrt{3}\Big) = \boldsymbol{Q}(\beta) = \boldsymbol{Q}\left(\frac{1}{\beta}\right) = \boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{2}-\sqrt{3}\Big).$$

さらに，

$$\sqrt{2} = \frac{\beta - \frac{1}{\beta}}{2} \in \boldsymbol{Q}(\beta), \qquad \sqrt{3} = \frac{\beta + \frac{1}{\beta}}{2} \in \boldsymbol{Q}(\beta)$$

よって，$\boldsymbol{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \subset \boldsymbol{Q}(\beta) = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

(3) $\boldsymbol{Q}\Big(\sqrt[3]{2}\Big) = \boldsymbol{Q}\Big(\sqrt[3]{4}\Big)$

$\gamma = \sqrt[3]{2}$, $\delta = \sqrt[3]{4}$ とおけば，$\delta = \gamma^2$ より $\boldsymbol{Q}(\delta) \subset \boldsymbol{Q}(\gamma)$．逆に，$\gamma = \dfrac{\delta^2}{2}$ より $\boldsymbol{Q}(\gamma) \subset \boldsymbol{Q}(\delta)$.

(4) $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{Q}$,　$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}$,　$\boldsymbol{Q}\big(\boldsymbol{R},\sqrt{-1}\big) = \boldsymbol{C}$,　$\boldsymbol{Q}\big(\sqrt{-1}\big) \subsetneq \boldsymbol{C}$

定義 2.5　L/K を体の拡大とすると，L は K 上のベクトル空間ともみなすことができる（L における和をベクトルの和，K の元に L の元をかける操作をスカラー倍とする）．このとき，K 上のベクトル空間としての L の次元を拡大 L/K の**次数**といい

$$[L:K]$$

で表す．$[L:K]$ が有限のとき，L/K は**有限次**拡大であるといい，そうでないとき**無限次**拡大であるという．

例 2.6　(1) $\boldsymbol{Q}(\sqrt{7})$ は $\boldsymbol{Q}$ 上 2 次拡大である，　$\left[\boldsymbol{Q}(\sqrt{7}) : \boldsymbol{Q}\right] = 2.$
だって，$1, \sqrt{7}$ は，$\boldsymbol{Q}$ 上 1 次独立だし，$\boldsymbol{Q}$ 上 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{7})$ を生成してるから，$\boldsymbol{Q}$ 上 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{7})$ の基底だもん．
(2) $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{5})/\boldsymbol{Q}$ は 3 次拡大である，　$\left[\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{5}) : \boldsymbol{Q}\right] = 3.$
なぜかというと，$1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25}$ は $\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{5})$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の基底だから．

補題 2.7　M を体の拡大 L/K の中間体とし，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in M$，$\beta_1, \cdots, \beta_n \in L$ とする．

$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ が K 上 1 次独立であり，かつ $\beta_1, \cdots, \beta_n$ が M 上 1 次独立

ならば，mn 個の L の元 $\alpha_i\beta_j$ $(i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n)$ は K 上 1 次独立である．

証明　mn 個の元 $\alpha_i\beta_j$ に K 上の線形関係

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\alpha_i\beta_j = 0 \qquad (c_{ij} \in K)$$

があったとする．このとき，すべての i, j に対して $c_{ij} = 0$ が成り立つことを確かめればよい．いま，上式を書き換えて

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\alpha_i\right)\beta_j = 0$$

を考えると，$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\alpha_i \in M$ であり，$\beta_1, \cdots, \beta_n$ が M 上 1 次独立という仮定から，

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij}\alpha_i = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

を得る．さらに，$c_{ij} \in K$ であり，かつ $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ が K 上 1 次独立という仮定から

$$c_{ij} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$$

が導かれる．　□

補題 2.8　M を体の拡大 L/K の中間体とし，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in M$，$\beta_1, \cdots, \beta_n \in L$ とする．

$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ が K 上 M を生成し，かつ $\beta_1, \cdots, \beta_n$ が M 上 L を生成する

ならば，mn 個の L の元 $\alpha_i\beta_j$ $(i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n)$ は K 上 L を生成する．

証明　任意の $\gamma \in L$ が，mn 個の元 $\alpha_i\beta_j$ の K 上の 1 次結合で表されることを確かめる．いま，$\beta_1, \cdots, \beta_n$ が M 上 L を生成するので，

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} b_j \beta_j$$

をみたす $b_j \in M$ が存在する．さらに，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ が K 上 M を生成するという仮定から，

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\alpha_i \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

となる $a_{ij} \in K$ がとれる．よって，

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\alpha_i \right) \beta_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\beta_j$$

と書け，γ が $\alpha_i\beta_j$ たちの K 上の 1 次結合で表されることがいえた． □

定理 2.9　M を体の拡大 L/K の中間体とすると，

$$[L : K] = [L : M][M : K]$$

が成り立つ．とくに，L/K が有限次拡大であるためには，L/M，M/K がともに有限次拡大であることが必要十分である．

証明　$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ を M の K 上の基底，$\beta_1, \cdots, \beta_n$ を L の M 上の基底とすると，

$$m = [M : K], \qquad n = [L : M].$$

ここで，補題 2.7 より，mn 個の元 $\alpha_i\beta_j$ は K 上 1 次独立だから

$$[L : K] \geq mn = [L : M][M : K],$$

一方，補題 2.8 より，L は K 上 mn 個の元によって生成されるから，

$$[L : K] \leq mn = [L : M][M : K]$$

が成り立ち，したがって等式が導かれる． □

§3. 代数的元

この節全体を通して，L/K を体の拡大とし，$\alpha, \beta, \cdots \in L$ とする．

定義 3.1 α を根とする K 上の零でない多項式が存在するとき，すなわち，

$$\exists f(X) \in K[X] - \{0\} \quad \text{s.t.} \quad f(\alpha) = 0$$

であるとき，α は K 上**代数的**であるという． K 上代数的でない元は，K 上**超越的**であるといわれる．

例 3.2 (1) $\sqrt{3}$ は $\boldsymbol{Q}$ 上代数的である．

(2) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt[3]{5}}$ は $\boldsymbol{Q}$ 上代数的である．

(3) 自然対数の底 e は $\boldsymbol{Q}$ 上超越的である（Hermite の定理 (1873)）．

(4) 円周率 π は $\boldsymbol{Q}$ 上超越的である（Lindemann の定理 (1882)）．

いま，$\alpha \in L$ に対して（K 上代数的であるかないかにかかわらず），写像

$$\varphi_\alpha : K[X] \longrightarrow L, \qquad g(X) \mapsto g(\alpha)$$

を考える． φ_α は可換環の準同型写像であり，その像は $K[\alpha]$ だから，準同型定理によって $K[X]/\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ は $K[\alpha]$ と同型;

$$K[X]/\operatorname{Ker}\varphi_\alpha \cong K[\alpha].$$

ここで，核は α を根とする K 上の多項式全体

$$\operatorname{Ker}\varphi_\alpha = \{\, f(X) \in K[X] \,|\, f(\alpha) = 0 \,\}$$

であり，$K[X]$ のイデアルである．

補題 3.3 α が K 上代数的であれば，$K[\alpha]$ は体である． よって，$K[\alpha] = K(\alpha)$ であり，X の属する類を α に対応させることによって，体の同型

$$K[X]/\operatorname{Ker}\varphi_\alpha \cong K(\alpha)$$

が得られる．

証明　可換環の同型 $K[X]/\operatorname{Ker}\varphi_\alpha \cong K[\alpha]$ において，$K[\alpha]$ は体 L の部分環だから整域，したがって $\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ は $K[X]$ の素イデアルである．ここで，α が K 上代数的だから，$\operatorname{Ker}\varphi_\alpha \neq (0)$ である．よって，$K[X]$ が PID であることを考慮すると，$\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ は $K[X]$ の極大イデアル，したがって $K[\alpha]$ は体である．□

注意　α が K 上超越的ならば，$\operatorname{Ker}\varphi_\alpha = (0)$，すなわち $K[X] \cong K[\alpha]$ である．とくに，$K[\alpha]$ は体ではない．

補題 3.4　α が K 上代数的であるとき，$g(\alpha) = 0$ をみたす零でない $g(X) \in K[X]$ に対して，

$$[K(\alpha) : K] \leq \deg g.$$

とくに，$K(\alpha)/K$ は有限次拡大である．

証明　前補題から $K[\alpha] = K(\alpha)$ であることに注意すれば，任意の $\beta \in K(\alpha)$ に対して，$\beta = h(\alpha)$ をみたす $h(X) \in K[X]$ がとれる．このとき，

$$h(X) = q(X)g(X) + r(X), \qquad r(X) = 0 \text{ または } \deg r < \deg g$$

をみたす $q(X), r(X) \in K[X]$ がとれ，したがって $\beta = r(\alpha)$ が成り立つ．$m = \deg g$ とすれば，

$$r(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_{m-1}\alpha^{m-1} \qquad (a_i \in K)$$

と書けるから，$K(\alpha)$ が K 上 m 個の元 $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$ によって生成される．よって

$$[K(\alpha) : K] \leq m = \deg g$$

が示された．□

補題 3.5　$K(\alpha)/K$ が有限次拡大ならば，α を根にもつ多項式 $f(X) \in K[X]$ で

$$[K(\alpha) : K] = \deg f$$

をみたすものが存在する．とくに，α は K 上代数的である．

証明　$n = [K(\alpha) : K]$ とすると，$n+1$ 個の元 $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ は K 上 1 次従属，よって（どれかは 0 ではない）$c_i \in K$ が存在して

$$c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \cdots + c_n\alpha^n = 0$$

が成り立つ．このとき，$f(X) \in K[X]$ を

$$f(X) = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \cdots + c_nX^n$$

と定めれば，$f(X)$ は α を根とする零でない多項式であり，補題 3.4 より

$$[K(\alpha) : K] \leq \deg f \leq n.$$

さらに，n の定義より，不等号は等号に置き換わり $[K(\alpha) : K] = \deg f$ を得る．□

定理 3.6　α に対して次は同値である．

(i)　α は K 上代数的である．

(ii)　$K(\alpha)/K$ は有限次拡大である．

証明　補題 3.4 と補題 3.5 からわかる．　□

定理 3.7　α が K 上代数的であるとき，α を根にもつ $f(X) \in K[X]$ に対して次は同値である．

(i)　$f(X)$ は K 上既約である．

(ii)　$\mathrm{Ker}\,\varphi_\alpha = (f(X))$.

(iii)　$[K(\alpha) : K] = \deg f$.

(iv)　$f(X)$ の次数は最小である．すなわち，$g(X)(\neq 0) \in K[X]$ が α を根にもつならば，$\deg f \leq \deg g$.

証明　まず，$f(\alpha) = 0$ より $f(X) \in \mathrm{Ker}\,\varphi_\alpha$，言い換えれば $(f(X)) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi_\alpha$ が成り立つことに注意する．
(i)⇒(ii): (i) を仮定すれば，単項イデアル $(f(X))$ は極大イデアルなので，(ii) を得る．
(ii)⇒(iii): 補題 3.4 から $[K(\alpha) : K] \leq \deg f$ が成り立つ．とくに $K(\alpha)/K$ は有限次だから，補題 3.5 を用いれば，$[K(\alpha) : K] = \deg g$ をみたす $g(X) \in \mathrm{Ker}\,\varphi_\alpha$ がとれ，さらに仮定 (ii) より $g(X) = f(X)h(X)$ $(h(X) \in K[X])$ と表される．よって

$$[K(\alpha) : K] \leq \deg f \leq \deg f + \deg h = \deg g = [K(\alpha) : K],$$

したがって $[K(\alpha) : K] = \deg f$ を得る．
(iii)⇒(iv): 補題 3.4 からすぐにわかる．
(iv)⇒(i): $f(X)$ が K 上可約だとすると，

$$f(X) = g(X)h(X), \qquad 1 \leq \deg g,\ \deg h < \deg f$$

をみたす $g(X), h(X) \in K[X]$ が存在する．ここで $g(\alpha)h(\alpha) = f(\alpha) = 0$ だから，$g(\alpha) = 0$ または $h(\alpha) = 0$ である．$g(\alpha) = 0$ のとき，仮定 (iv) より $\deg f \leq \deg g$ となって $g(X)$ の取り方に矛盾する．$h(\alpha) = 0$ の場合も同様に矛盾する．よって $f(X)$ は K 上既約でなければならない．　□

定義 3.8　前定理のような多項式 $f(X) \in K[X]$ のうちモニックなものは一意的に定まる．これを α の K 上の**最小多項式**という．ここで，モニックな多項式とは，最高次の係数が 1，すなわち

$$f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

の形をした多項式のことである．

定理 3.9　α が K 上代数的ならば，α の K 上の最小多項式が存在する．

証明　定理 3.6，補題 3.5 および最小多項式の定義から直ちに導かれる．　□

定理 3.10　$K(\alpha)/K$ が有限次拡大で $[K(\alpha):K]=n$ ならば，

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{n-1}$$

は K 上ベクトル空間としての $K(\alpha)$ の基底である．

証明　$f(X)$ を α の K 上の最小多項式とすると，$n=\deg f$ である．さらに $f(\alpha)=0$ であるから，補題 3.4（の証明）から，n 個の元 $1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}$ は K 上 $K(\alpha)$ を生成している．一方，$K(\alpha)$ は K 上 n 次元のベクトル空間だから，これらは基底となる．　□

例 3.11　(1)　$\sqrt{3}$ は $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は X^2-3.
(2)　$1-\sqrt{5}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は X^2-2X-4.
(3)　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は $X^3-\dfrac{1}{7}$.
(4)　$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は $X^6-6X^4-6X^3+12X^2-36X+1$.
最後の例は，たとえば，以下を順に示すことで得られる; ただし，

$$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3},\qquad f(X)=X^6-6X^4-6X^3+12X^2-36X+1$$

とする．

(a)　$f(\alpha)=0$ より $[\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]\le \deg f=6$　(補題 3.4)

(b)　$\sqrt[3]{3}=\alpha-\sqrt{2}$ の両辺を 3 乗することにより，$\sqrt{2}\in\boldsymbol{Q}(\alpha)$

(c)　$\boldsymbol{Q}(\alpha)=\boldsymbol{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{3})$

(d)　$[\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]$ は 2 でも 3 でも割り切れる (定理 2.9) から，$[\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]\ge 6$

(e)　(a), (d) をあわせて，$[\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]=6=\deg f$

(f)　$f(X)$ は α の最小多項式であり，さらに $\boldsymbol{Q}$ 上既約である (定理 3.7).

§4. 代数拡大

定義 4.1 L/K を体の拡大とする．L の任意の元が K 上代数的であるとき，L は K 上**代数的**であるという．また，L/K を**代数拡大**という．L が K 上代数的でないとき，L は K 上**超越的**であるといい，L/K を**超越拡大**という．

命題 4.2 有限次拡大は代数拡大である．とくに，α が K 上代数的ならば $K(\alpha)/K$ は代数拡大である．

証明 （補題 3.5 と同様に証明できるが，念のため……）L/K が有限次で $n=[L:K]$ とすると，任意の $\beta\in L$ に対して，$n+1$ 個の元 $1,\beta,\beta^2,\dots,\beta^n$ は K 上 1 次従属，よって（どれかは 0 ではない）$c_i\in K$ が存在して

$$c_0+c_1\beta+c_2\beta^2+\cdots+c_n\beta^n=0$$

が成り立つ．このとき，$f(X)=c_0+c_1X+c_2X^2+\cdots+c_nX^n$ と定めれば，$f(X)$ は β を根にもつ零でない K 上の多項式だから，β は K 上代数的である．後半は定理 3.6 からわかる． □

命題 4.3 体の拡大 L/K に対して次は同値である．

(i) L/K は有限次拡大である．

(ii) K 上代数的な有限個の元 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in L$ が存在して，$L=K(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ が成り立つ．

証明 (i) のとき，ベクトル空間としての L の K 上の基底 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ をとれば，前命題よりこれらはすべて K 上代数的であり，(ii) が導かれる．逆に，(ii) のときは，

$$K_0=K,\quad K_1=K_0(\alpha_1),\quad K_2=K_1(\alpha_2),\quad \dots,\quad K_n=K_{n-1}(\alpha_n)$$

とおけば，各 $i=1,\dots,n$ について，α_i は K_{i-1} 上代数的だから，定理 3.6 より K_i/K_{i-1} は有限次，したがって $L=K_n$ は K 上有限次であることが導かれ，(i) を得る． □

定理 4.4 M を体の拡大 L/K の中間体とするとき，次は同値である．

(i) L/K は代数拡大である．

(ii) $L/M,\ M/K$ はともに代数拡大である．

証明　(i) ならば (ii) が成り立つのはあきらかなので，以下，(ii) を仮定して (i) を導く．そのために，任意の $\alpha \in L$ が K 上代数的であることを確かめる．(ii) より L/M は代数的だから，α は M 上代数的，したがって，α を根とする M 上の零でない多項式

$$g(X) = c_0 + c_1 X + \cdots + c_n X^n \qquad (c_i \in M)$$

が存在する．いま，$M_0 = K(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ とおくと，α は M_0 上代数的であるから，定理 3.6 より $M_0(\alpha)/M_0$ は有限次である．一方，仮定 (ii) より M/K も代数的なので c_i は K 上代数的，よって，前命題より M_0/K は有限次である．したがって $M_0(\alpha)/K$ は有限次拡大であり，命題 4.2 から代数拡大でもある．とくに α は K 上代数的である．□

例 4.5　自然数 n に対して，$z^n = 1$ をみたす複素数全体を W_n とする;

$$W_n = \{\, z \in \boldsymbol{C} \mid z^n = 1 \,\}.$$

いま，

$$\zeta_n = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$$

とおけば，$W_n = \{\, \zeta_n^j \mid j = 0, 1, \ldots, n-1 \,\}$ と具体的にかけ，これが $X^n - 1$ の根全体の集合と一致する．よって，命題 4.3 より $\boldsymbol{Q}(W_n)/\boldsymbol{Q}$ は有限次，したがって，命題 4.2 より代数拡大である（実際には，$\boldsymbol{Q}(W_n) = \boldsymbol{Q}(\zeta_n)$ が成り立っているので，命題 4.3 は必要ない）．とくに n が素数 p の場合，ζ_p は $X^p - 1$ の既約因子 $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ の根だから，定理 3.7 より，

$$[\boldsymbol{Q}(W_p) : \boldsymbol{Q}] = [\boldsymbol{Q}(\zeta_p) : \boldsymbol{Q}] = p - 1.$$

この等式は，任意の自然数 n に対して，オイラー関数 φ を用いた等式

$$[\boldsymbol{Q}(W_n) : \boldsymbol{Q}] = [\boldsymbol{Q}(\zeta_n) : \boldsymbol{Q}] = \varphi(n)$$

に拡張されるが，証明は少し難しい.

補題 4.6　L/K を体の拡大とし，$A \subset L$ とすると，$K(A)$ は A の有限部分集合 B のすべてを走らせることにより

$$K(A) = \bigcup_B K(B)$$

と表される．すなわち，任意の $\alpha \in K(A)$ に対して，$\alpha \in K(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ であるような有限個の $\beta_1, \cdots, \beta_n \in A$ がとれる.

証明 $M = \bigcup_B K(B)$ とおく． あきらかに $K \subset M$ であり，また $A \subset M$ もすぐにわかる． さらに，A の任意の有限部分集合 B に対して $K(B) \subset K(A)$ だから，$M \subset K(A)$. よって，補題を示すためには，M が体であることを確かめればよい． いま，M の任意の元 $\beta, \gamma \neq 0$ に対して，$\beta \in K(B)$，$\gamma \in K(C)$ をみたす A の有限部分集合 B, C がとれる． $D = B \cup C$ とおけば，これも A の有限部分集合であって $\beta, \gamma \in K(D)$ であるが，$K(D)$ は体なので，β, γ の和，差，積，商は $K(D)$ に属する． さらに $K(D) \subset M$ なので，これらは M に属する． よって，M は体である． □

定理 4.7 L/K を体の拡大とし，$A \subset L$ とする． A の任意の元が K 上代数的ならば $K(A)/K$ は代数拡大である．

証明 任意の $\alpha \in K(A)$ に対して，前補題から，$\alpha \in K(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ をみたす $\beta_i \in A$ がとれる． 仮定より β_i は K 上代数的だから，拡大 $K(\beta_1, \cdots, \beta_n)/K$ は，命題 4.3 より有限次，よって命題 4.2 より代数的，とくに α は K 上代数的である． □

系 4.8 L/K を体の拡大とする． $\alpha, \beta \in L$ $(\beta \neq 0)$ がともに K 上代数的ならば，それらの和と差 $\alpha \pm \beta$，積 $\alpha\beta$，商 α/β はどれも K 上代数的である．

証明 前定理より $K(\alpha, \beta)$ は K 上代数的であり，$\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta \in K(\alpha, \beta)$ だから結論を得る． □

例 4.9 複素数平面における単位円を S とする． また，ある自然数 n に対して，$z^n = 1$ をみたす複素数全体を W で表す．

$$S = \{\, z \in \boldsymbol{C} \mid |z| = 1 \,\} = \left\{\, x + iy \in \boldsymbol{C} \mid x, y \in \boldsymbol{R},\ x^2 + y^2 = 1 \,\right\},$$
$$W = \{\, z \in \boldsymbol{C} \mid \exists n \in \boldsymbol{N} \text{ s.t. } z^n = 1 \,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n.$$

すべての $n \in \boldsymbol{N}$ について，$\boldsymbol{Q}(W_n) \subset \boldsymbol{Q}(W) \subset \boldsymbol{Q}(S)$． ここで，以下が成り立つ．

(1) $\boldsymbol{Q}(W)/\boldsymbol{Q}$ は有限次ではない代数拡大である．

(2) $\boldsymbol{Q}(S)/\boldsymbol{Q}$ は超越拡大である．

(1) は，定理 4.7 および例 4.5 から容易に証明できる． (2) の証明法はいくつかあるが，どれも簡単ではない．

命題 4.10　L/K を体の拡大とし，M をその中間体とする．$\alpha \in L$ が K 上代数的であるとき，

$$[M(\alpha) : M] \leq [K(\alpha) : K]$$

が成り立つ．

証明　α の K 上の最小多項式を $f(X)$ とすると，$\deg f = [K(\alpha) : K]$．一方，$f(X)$ は M 上の多項式でもあるから，補題 3.4 より，$[M(\alpha) : M] \leq \deg f$ であり，求める不等式を得る．□

例 4.11　$X^3 - 1$ の 1 でない根のひとつを ω とする（1 の原始 3 乗根）．このとき，ω, ω^2 は $X^2 + X + 1$ の 2 根である．$X^3 - 2$ の実根を α とすれば，他の根は $\alpha\omega, \alpha\omega^2$ で与えられる．$X^3 - 2$ は $\boldsymbol{Q}$ 上既約だから，定理 3.7 より $\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q}$ は 3 次拡大である．このとき，

(a)　$M = \boldsymbol{Q}(\omega)$ とおけば，$[M(\alpha) : M] = 3 = [\boldsymbol{Q}(\alpha) : \boldsymbol{Q}]$,

(b)　$L = \boldsymbol{Q}(\alpha\omega)$ とおけば，$[L(\alpha) : L] = 2 < 3 = [\boldsymbol{Q}(\alpha) : \boldsymbol{Q}]$

が成り立ち，それぞれ，前命題において，等号が成り立つ例，成り立たない例となっている．

定義 4.12　Ω/K を体の拡大とし，L, M をその中間体とするとき，L, M をともに含む Ω の最小の部分体を L, M の**合成体**といい LM で表す．すなわち，$LM = L(M) = M(L)$ である．

定理 4.13　L, M が体の拡大 Ω/K の中間体で，L/K が有限次拡大ならば

$$[LM : M] \leq [L : K]$$

が成り立つ．

証明　命題 4.3 より，$L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ をみたす K 上代数的な元 α_i がとれる．

$$K_0 = K, \quad K_1 = K_0(\alpha_1), \quad K_2 = K_1(\alpha_2), \quad \ldots, \quad K_n = K_{n-1}(\alpha_n)$$
$$M_0 = M, \quad M_1 = M_0(\alpha_1), \quad M_2 = M_1(\alpha_2), \quad \ldots, \quad M_n = M_{n-1}(\alpha_n)$$

とおくと，命題 4.10 より $[M_i : M_{i-1}] \leq [K_i : K_{i-1}]$．さらに，$L = K_n$ かつ $LM = M_n$ だから，

$$[LM : M] = [M_n : M_{n-1}] \cdots [M_1 : M_0] \leq [K_n : K_{n-1}] \cdots [K_1 : K_0] = [L : K]$$

が導かれる．□

§5. 根の添加

以下で扱う準同型写像はどれも零写像ではないとする.

まず，**体から体への準同型写像は単射**であることに注意する.

【理由】 体 K から体 M への準同型写像 $\sigma : K \longrightarrow M$ の核 $\mathrm{Ker}\,\sigma$ は体 K のイデアルだから，$\{0\}$ または K のどちらかであるが，いま，σ は零写像ではないとしているので，$\mathrm{Ker}\,\sigma = \{0\}$. したがって σ は単射である.

…ということは，体から環への零でない準同型写像でも単射だなぁ…

定義 5.1 L/K を体の拡大とする.

$$\sigma : L \longrightarrow M, \qquad \tau : K \longrightarrow M$$

がそれぞれ L, K から体 M への準同型写像であって，

$$\forall a \in K \quad \text{に対して} \quad \sigma(a) = \tau(a)$$

をみたすとき，σ は τ の L への**延長**，あるいは，τ は σ の K への**制限**であるという. また，このとき $\tau = \sigma|_K$ と表す.

定義 5.2 L, M がともに体 K の拡大体で，準同型写像

$$\sigma : L \longrightarrow M$$

が K の恒等写像 $\mathrm{id}_K : K \to K$ の延長であるとき，つまり $\sigma(a) = a$ $(\forall a \in K)$ のとき，σ を K **上の写像**という.

定義 5.3 体 L から体 M への準同型写像 $\sigma : L \to M$ が全射であるとき，σ を**同型写像**といい，L と M は**同型**であるという. このとき

$$L \cong M$$

と表すことがある.

定義 5.4 可換環 R から可換環 S への準同型写像

$$\sigma : R \longrightarrow S$$

が与えられたとき，$f(X) \in R[X]$ に対して，その係数に σ をほどこして得られる S 上の多項式を $f^{\sigma}(X)$ と表す.

定理 5.5　$f(X)$ を体 K 上の既約多項式とすると，剰余環 $K[X]/(f(X))$ は体である．さらに，

包含写像 $\iota : K \longrightarrow K[X]$ および，自然な全射 $\nu : K[X] \longrightarrow K[X]/(f(X))$

の合成写像として

$$\sigma = \nu \circ \iota : K \longrightarrow K[X]/(f(X))$$

を定めると，σ は体の準同型写像であり，$x = X + (f(X)) \in K[X]/(f(X))$（つまり $x = \nu(X)$）とおけば，$f^\sigma(x) = 0$ が成り立つ．

証明　$K[X]$ は PID だから，既約元で生成されるイデアル $(f(X))$ は極大イデアルであり，したがって，それによる剰余環 $K[X]/(f(X))$ は体である．また，ι，ν はどちらも準同型写像だから，σ は準同型写像である．いま，

$$f(X) = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \qquad (c_i \in K)$$

とすれば，$\iota(c_i) = c_i \in K \subset K[X]$ だから，$\sigma(c_i) = \nu(c_i)$，したがって

$$f^\sigma(x) = \nu(c_0) + \nu(c_1)\nu(X) + \cdots + \nu(c_n)\nu(X)^n = \nu(f(X)) = 0$$

となる．　□

定理 5.6 (クロネッカー) 体 K 上の定数でない任意の多項式 $f(X)$ に対して，K の拡大体 L とその元 α で $f(\alpha) = 0$ をみたすものが存在する．

証明　$f(X)$ の K 上の既約因子をあらためて $f(X)$ とおくことにより，初めから $f(X)$ は K 上の既約多項式であるとしてよい．このとき，$L = K[X]/(f(X))$，$\alpha = X + (f(X)) \in L$ とおけば，定理 5.5 より，L は体であり，単射準同型写像 $\sigma : K \to L$ が定義できて，$f^\sigma(\alpha) = 0$ をみたす．そこで，σ の像 $\sigma(K)$ を K と同一視すればよい．　□

注意　定理 5.6 から，K 上の既約多項式 $f(X)$ に対して，K の拡大体 L と $f(X)$ の根 $\alpha \in L$ が存在する．この α を用いて，準同型写像

$$\varphi_\alpha : K[X] \longrightarrow L, \qquad g(X) \mapsto g(\alpha)$$

が定義できて，$\operatorname{Im}\varphi_\alpha = K(\alpha) \subset L$ がわかる（§3 を参照）．一方，$\operatorname{Ker}\varphi_\alpha$ が $K[X]$ のイデアル $(f(X))$ に一致することが，$f(X)$ の K 上の既約性から確認できる（定理 3.7 参照）．したがって，準同型定理より，φ_α は同型写像

$$\tilde{\varphi}_\alpha : K[X]/(f(X)) \longrightarrow K(\alpha)$$

を引き起こす．なお，定理 5.5 の準同型写像 σ と $\tilde{\varphi}_\alpha$ との合成 $\tilde{\varphi}_\alpha \circ \sigma$ は，K から $K(\alpha)$ への包含写像に他ならない．

例 5.7　X^2+1 は実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の既約多項式であり，その根 i に対して，$\boldsymbol{R}(i)$ は剰余環 $\boldsymbol{R}[X]/(X^2+1)$ と同型である． $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}(i)$ とかけば,

$$\boldsymbol{C}\cong\boldsymbol{R}[X]/(X^2+1).$$

$1, i$ は $\boldsymbol{C}$ の $\boldsymbol{R}$ 上の基底であって，$\boldsymbol{C}$ の任意の元は $a+bi$ $(a,b\in\boldsymbol{R})$ の形に一意的に表される． ここで，$\boldsymbol{C}$ の 2 元

$$a+bi,\quad c+di\quad(a,b,c,d\in\boldsymbol{R})$$

に "対応" する多項式 $a+bX,\, c+dX\in\boldsymbol{R}[X]$ の積

$$ac+(ad+bc)X+bdX^2=(ac-bd)+(ad+bc)X+bd(X^2+1)$$

は，$\boldsymbol{R}[X]/(X^2+1)$ においては $(ac-bd)+(ad+bc)X$ と同じ類に属する． つまり

$$(a+bX)(c+dX)\equiv(ac-bd)+(ad+bc)X\pmod{(X^2+1)}$$

であり，これはよく知られた複素数における積の公式

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

に対応する． この例は，虚数単位 i を導入しなくても複素数体が構成できることを示している．

例 5.8　$f(X)=X^3-4X+2$ は $\boldsymbol{Q}$ 上既約であり，その任意の根 α に対して，$\boldsymbol{Q}(\alpha)$ は剰余環 $\boldsymbol{Q}[X]/(f(X))$ と同型である;

$$\boldsymbol{Q}(\alpha)\cong\boldsymbol{Q}[X]/(f(X)).$$

$1,\alpha,\alpha^2$ は $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の基底であり，$\boldsymbol{Q}(\alpha)$ の任意の元は $1,\alpha,\alpha^2$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の 1 次結合で表される． たとえば

$$\beta=1+\alpha^2,\qquad\gamma=3-2\alpha+\alpha^2$$

の積は，次の様に計算される． まず，多項式の積

$$(1+X^2)(3-2X+X^2)=X^4-2X^3+4X^2-2X+3$$

を計算し，$\boldsymbol{Q}[X]/(f(X))$ における類を考えればよいから，この 4 次式を $f(X)$ で割って余りを求める;

$$X^4-2X^3+4X^2-2X+3=(X-2)f(X)+(8X^2-12X+7),$$

こうして，積 $\beta\gamma=7-12\alpha+8\alpha^2$ が計算できる．

定理 5.9　体 K 上の既約多項式 $f(X)$ とその任意の 2 根 α, β に対して，K 上の同型写像

$$\sigma : K(\alpha) \longrightarrow K(\beta)$$

で，$\sigma(\alpha) = \beta$ をみたすものが存在する．

証明　定理 5.6 の後の注意より，$g(X) \in K[X]$ を $g(\alpha)$ または $g(\beta)$ に写すことで定まる準同型写像

$$K[X] \longrightarrow K(\alpha), \qquad K[X] \longrightarrow K(\beta)$$

は，同型写像

$$\tau : K[X]/(f(X)) \longrightarrow K(\alpha), \qquad \rho : K[X]/(f(X)) \longrightarrow K(\beta)$$

をそれぞれ引き起こす．このとき，$\sigma = \rho \circ \tau^{-1}$ が求める同型写像となる．　□

例 5.10　$X^2 + 1$ のひとつの根を i とすれば，もうひとつの根は $-i$ である．このとき，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}(i)$ から自分自身への写像

$$\boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}, \qquad a + bi \mapsto a - bi$$

が $\boldsymbol{R}$ 上の同型写像になっている（$a, b \in \boldsymbol{R}$）．この写像は，ふつう複素共役写像とよばれる．

例 5.11　$X^3 - 2$ は $\boldsymbol{Q}$ 上既約であり，その実根を $\alpha = \sqrt[3]{2}$ とすると，$1, \alpha, \alpha^2$ は $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の基底である．他の根は $\alpha\omega, \alpha\omega^2$（$\omega = e^{2\pi i/3}$ は 1 の原始 3 乗根）である．このとき，$\boldsymbol{Q}(\alpha)$ と $\boldsymbol{Q}(\alpha\omega)$ は同型であり，写像

$$\sigma : \boldsymbol{Q}(\alpha) \longrightarrow \boldsymbol{Q}(\alpha\omega), \qquad a + b\alpha + c\alpha^2 \ \mapsto \ a + b\alpha\omega + c\alpha^2\omega^2$$

が同型写像を与えている（$a, b, c \in \boldsymbol{Q}$）．同様にして，$\boldsymbol{Q}(\alpha)$ と $\boldsymbol{Q}(\alpha\omega^2)$ も同型であり，同型写像は

$$\tau : \boldsymbol{Q}(\alpha) \longrightarrow \boldsymbol{Q}\big(\alpha\omega^2\big), \qquad a + b\alpha + c\alpha^2 \ \mapsto \ a + b\alpha\omega^2 + c\alpha^2\omega$$

で与えられる．

§6. 代数的閉体と共役元

定義 6.1 体 L の代数拡大体が L のみであるとき，L を**代数的閉体**という．

つまり，L が代数的閉体であるとは，L のどんな拡大体 M をとっても，『$\alpha \in M$ が L 上代数的ならば $\alpha \in L$』 となることである．

例 6.2 (1) $\boldsymbol{C}$ は代数的閉体である（代数学の基本定理）．
(2) $\boldsymbol{R}$ は代数的閉体ではない．

定理 6.3 体 L に対して次は同値である．

(i) L は代数的閉体である．
(ii) L 上の既約多項式はすべて 1 次式である．
(iii) L 上の定数でない任意の多項式は L 上の 1 次式の積に分解される．
(iv) L 上の定数でない任意の多項式は L で根を持つ．

証明 (i)⇒(ii): $f(X)$ を L 上の既約多項式とする． クロネッカーの定理（定理 5.6）より，L の拡大体 M と $\alpha \in M$ で $f(\alpha) = 0$ をみたすものがとれるが，仮定より $\alpha \in L$ であるから，$\deg f = [L(\alpha) : L] = 1$ を得る．
(ii)⇒(iii): L 上の定数でない任意の多項式は既約多項式の積に分解されるから，仮定より (iii) が導かれる．
(iii)⇒(iv): あきらか．
(iv)⇒(i): M/L を代数拡大とするとき，任意の $\alpha \in M$ に対して，$\alpha \in L$ であることを確かめればよい． いま，α の L 上の最小多項式を $f(X)$ とすると，仮定より，$f(X)$ は根 $\beta \in L$ を持つ． 一方，定理 5.9 より $L(\alpha)$ と $L(\beta)$ は L 上同型であり，とくに L 上の次数は等しいから $[L(\alpha) : L] = [L(\beta) : L] = 1$，ゆえに $L(\alpha) = L$，すなわち $\alpha \in L$ でなければならない． □

定義 6.4 体 K の代数拡大体であって代数的閉体であるものを K の**代数的閉包**という．

定理 6.5 Ω が代数的閉体ならば，Ω に含まれる任意の部分体に対して，その代数的閉包が Ω の中に一意的に存在する．

証明　（存在すること） K を Ω の任意の部分体とする． K 上代数的な Ω の元全体

$$L = \{\, \alpha \in \Omega \,|\, \alpha \text{ は } K \text{ 上代数的} \,\}$$

は K の代数拡大体である． なぜなら，定理 4.7 より $K(L)/K$ は代数的であり，したがって L の定義から $K(L) \subset L$ となり，結局 $L = K(L)$ が得られるからである． 以下，L が代数的閉体であることを示す． $f(X)$ を L 上の定数でない任意の多項式とする． $f(X)$ は Ω 上の多項式でもあるが，Ω が代数的閉体であるという仮定から，定理 6.3 より，$f(\alpha) = 0$ である $\alpha \in \Omega$ がとれる． また，$f(\alpha) = 0$ より α は L 上代数的であるが，L/K が代数拡大であることに注意すれば，α は K 上代数的でもある（定理 4.4 参照）． よって L の定義から，$\alpha \in L$ であり，再び定理 6.3 より，L が代数的閉体であることが導かれる．
（一意性） Ω の部分体 L_1, L_2 がどちらも K 上の代数的閉包であるとする． 任意の $\alpha \in L_1$ に対して，α は K 上代数的だから，もちろん L_2 上も代数的だが，L_2 は代数的閉体なので $\alpha \in L_2$． したがって $L_1 \subset L_2$． 役割を入れ替えれば $L_2 \subset L_1$ も導かれ，$L_1 = L_2$ が得られた． □

例 6.6　(1)　$\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{R}$ の代数的閉包である．
(2)　$\boldsymbol{Q}$ の代数的閉包は $\boldsymbol{C}$ の中で一意的に定まるが，それは $\boldsymbol{C}$ ではない．
(3)　L が K の代数的閉包ならば，L/K の任意の中間体 M は K 上の代数拡大体であり，さらに L は M の代数的閉包でもある．

定理 6.7（シュタイニッツ）　任意の体 K に対してその代数的閉包が存在する．さらに，L_1, L_2 がどちらも体 K の代数的閉包ならば，K 上の同型写像 $L_1 \to L_2$ が存在する．

証明は**選出公理**（またはそれと同値な**ツォルンの補題**，**整列可能定理**など）を用いてなされるが，ちょいと面倒なので証略，いや省略する．

以下で扱う体は，とくにことわらない限り，すべてある一つの代数的閉体に含まれているとする． したがって，定理 6.5 より，体 K に対してその中で代数的閉包が一意的に定まる． それを $\overline{K}$ で表す． このとき，K **上の代数拡大体はすべて** $\overline{K}/K$ **の中間体**と考えてよい． 実際，M/K が代数拡大ならば，M の任意の元は $\overline{K}$ 上代数的だから，定理 4.7 より，$\overline{K}(M)$ は $\overline{K}$ 上代数的である． よって代数的閉体の定義から $\overline{K}(M) = \overline{K}$，ゆえに $M \subset \overline{K}$ となる． また，このとき $\overline{K}$ は M の代数的閉包，すなわち $\overline{M} = \overline{K}$ が成り立つ（例 6.6 (3) を参照）．

定義 6.8　体の拡大 L/K に対して，L から L への K 上の同型写像を，L の K 上の**自己同型写像**，または L/K の自己同型写像という．また，それら全体の集合を $\mathrm{Aut}(L/K)$ で表し，L の K 上の**自己同型群**，または L/K の自己同型群という;

$$\mathrm{Aut}(L/K) = \{\, \sigma \mid \sigma : L \to L, \quad K \text{ 上の同型写像 } \}.$$

定理 6.9　L が $\overline{K}/K$ の中間体，すなわち L が体 K 上の代数拡大体で，

$$\tau : L \longrightarrow \overline{K}$$

が K 上の準同型写像であるとする．このとき，τ の延長 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が存在する．すなわち，K 上の同型写像

$$\sigma : \overline{K} \longrightarrow \overline{K}$$

で，任意の $a \in L$ に対して $\sigma(a) = \tau(a)$ であるものがとれる．

この証明も，ふつう**ツォルンの補題**を使って行われる．やはり少し面倒なので省略する．

定義 6.10　K を体とする．$\alpha, \beta \in \overline{K}$ それぞれの K 上の最小多項式が一致するとき，α, β は K 上**共役**であるという．また，β を α の K 上の**共役元**ともいう．α の K 上の共役元全体の集合を $\mathrm{Conj}(\alpha, K)$ で表す．言い換えると，α の K 上の最小多項式の根全体の集合が $\mathrm{Conj}(\alpha, K)$ である．

例 6.11　$z \in \boldsymbol{C}$ の複素共役 $\bar{z}$ は，z の $\boldsymbol{R}$ 上の共役元であり，$\mathrm{Conj}(z, \boldsymbol{R}) = \{z, \bar{z}\}$ が成り立つ．

定理 6.12　体 K と $\alpha \in \overline{K}$ に対して次が成り立つ．

(1)　任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して，$\sigma(\alpha)$ は α と K 上共役である．

(2)　$\beta \in K$ が α と K 上共役ならば，$\sigma(\alpha) = \beta$ をみたす $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が存在する．

証明　(1)　$f(X)$ を α の K 上の最小多項式とすれば，

$$f(\beta) = f(\sigma(\alpha)) = \sigma(f(\alpha)) = 0,$$

よって β は α と K 上共役である．
(2)　α, β が K 上共役ならば，定理 5.9 より，K 上の同型写像

$$\tau : K(\alpha) \longrightarrow K(\beta) \subset \overline{K}$$

で $\tau(\alpha) = \beta$ であるものが存在する．そこで，定理 6.9 を適用すればよい．　□

系 6.13　体 K と $\alpha \in \overline{K}$ に対して，

$$\mathrm{Conj}(\alpha, K) = \left\{ \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K) \right\}$$

が成り立つ．

定理 6.14　体 K と $\alpha \in \overline{K}$ に対して，

$$|\mathrm{Aut}(K(\alpha)/K)| \leq |\mathrm{Conj}(\alpha, K)| \leq [K(\alpha) : K]$$

が成り立つ．

証明　$\sigma \in \mathrm{Aut}(K(\alpha)/K)$ に対して $\sigma(\alpha) \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ を対応させることにより，単射

$$\mathrm{Aut}(K(\alpha)/K) \longrightarrow \mathrm{Conj}(\alpha, K)$$

が定まり，前半の不等式が導かれる．次に，$f(X)$ を α の K 上の最小多項式とすると，

$$|\mathrm{Conj}(\alpha, K)| = \text{“}f(X) \text{ の根の個数”} \leq \deg f = [K(\alpha) : K]$$

を得る．　□

注意　“$f(X)$ の根の個数” $\leq \deg f$ としたのは，$f(X)$ が重根を持つ可能性があるからである．重根を持たない場合，根の個数は次数と一致する．

例 6.15　$\sqrt{2}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は $X^2 - 2$，したがって

$$\mathrm{Conj}(\sqrt{2}, \boldsymbol{Q}) = \{ \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}.$$

また，$\sigma \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})/\boldsymbol{Q})$ とすると，$\sigma(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$．符号のとり方により，$\sigma = \mathrm{id}$（恒等写像）または $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ となるから，後者をあらためて σ と定めれば，

$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})/\boldsymbol{Q}) = \{ \mathrm{id}, \sigma \}$$

となる．よって，定理 6.14 の不等式はすべて等号になっている．

例 6.16　$X^3 - 2$ の実根 $\alpha = \sqrt[3]{2}$ と他の根 $\alpha\omega$, $\alpha\omega^2$ について，

$$\mathrm{Conj}(\alpha, \boldsymbol{Q}) = \left\{ \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2 \right\}.$$

一方，同型写像 $\boldsymbol{Q}(\alpha) \to \boldsymbol{Q}(\alpha)$ によって α は α にしか写らないから

$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q}) = \{ \mathrm{id} \}.$$

よって，この場合は定理 6.14 の左の不等号は $1 < 3$ となっていて，等号ではない．

§7. 標数

K を体とする．自然数 n に対して $1 \in K$ の n 個の和を $\Gamma(n)$ とする;

$$\Gamma(n) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}$$

さらに，$\Gamma(-n) = -\Gamma(n)$，$\Gamma(0) = 0$ と定める．

補題 7.1　上で定めた写像

$$\Gamma : \boldsymbol{Z} \longrightarrow K$$

は，可換環の準同型写像であり，その核は，$p = 0$ または素数によって，$\mathrm{Ker}\,\Gamma = (p)$ と表される（$\mathrm{Ker}\,\Gamma = p\boldsymbol{Z}$ と表してもよい）．

証明　【準同型であること】 すべての $m, n \in \boldsymbol{Z}$ に対して

$$\Gamma(m+n) = \Gamma(m) + \Gamma(n), \qquad \Gamma(mn) = \Gamma(m)\,\Gamma(n)$$

が成り立つことを確かめればよい． m, n のどちらかが 0 のときはあきらかに成り立つ．そこで，m, n がどちらも正のとき，どちらか一方が負のとき，どちらも負のときに場合分けし，厳密には数学的帰納法を用いて確認する（というわけで，あとはキミたちにおまかせっちゅうわけ）．
【核について】 Γ の像は体 K の部分環なので整域である． よって，準同型定理より Γ の核は $\boldsymbol{Z}$ の素イデアル，したがって $\mathrm{Ker}\,\Gamma = (0)$，または素数 p を用いて $\mathrm{Ker}\,\Gamma = (p)$ と表される． □

定義 7.2　体 K に対して，$\mathrm{Ker}\,\Gamma = (p)$ をみたす $p \geq 0$ を K の**標数**という．

注意　補題 7.1 より，K の標数は 0 または素数である． 以下のように，写像 Γ を用いず直接的に標数を定義することもできる． K の単位元 1 を 2 個以上 p 個足し合わせて初めて 0 となるとき（すなわち $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p} = 0$ のとき），p は素数である（証明してみよ）． この p を K の標数とする． 1 をいくつ足し合わせても 0 にならないとき，K の標数を 0 とする． さらに，整域 R に対しても，上と同様にして標数を定義することができる． この場合も，整域 R の標数は 0 または素数である．

定義 7.3　素数 p に対して

$$\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$$

とおく． $\boldsymbol{F}_p$ は p 個の元からなる**有限体**であって，標数は p である．

定理 7.4　K を標数 p の体とする．

(1) $p = 0$ ならば，単射準同型

$$\boldsymbol{Q} \longrightarrow K$$

が一意的に存在する． すなわち，K は有理数体 $\boldsymbol{Q}$ と同型な部分体をもつ．

(2) $p > 0$ すなわち p が素数ならば，単射準同型

$$\boldsymbol{F}_p \longrightarrow K$$

が一意的に存在する． すなわち，K は有限体 $\boldsymbol{F}_p$ と同型な部分体をもつ．

証明　(1)　$n \neq 0$ ならば $\Gamma(n) \neq 0$ なので，$a = \dfrac{m}{n} \in \boldsymbol{Q}$ $(m, n \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0)$ のとき，

$$\tilde{\Gamma}(a) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n)}$$

とおくことによって

$$\tilde{\Gamma} : \boldsymbol{Q} \longrightarrow K$$

を定めることができる． これが単射準同型写像であることを示すのは難しくない． 次に一意性を示すために，$\Delta : \boldsymbol{Q} \to K$ も単射準同型であるとする． このとき，$\tilde{\Gamma}(1) = 1 = \Delta(1)$ である． いま，$1 \in \boldsymbol{Q}$ から始めて四則演算を繰り返して得られる集合が $\boldsymbol{Q}$ に一致することと，$\tilde{\Gamma}, \Delta$ がともに準同型であることを合わせて考えれば，すべての $a \in \boldsymbol{Q}$ に対して $\tilde{\Gamma}(a) = \Delta(a)$ が示され，一意性を得る．
(2)　$\Gamma : \boldsymbol{Z} \to K$ の核が $(p) = p\boldsymbol{Z}$ であることから，準同型定理を適用すれば，単射準同型写像

$$\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z} \longrightarrow K$$

が得られる． 一意性については，$1 \in \boldsymbol{F}_p$ から始めて四則演算を繰り返して得られる集合が $\boldsymbol{F}_p$ に一致すること以外は上と同様である． □

定義 7.5　体 K に対して，前定理から定まる，$\boldsymbol{Q}$ または $\boldsymbol{F}_p$ と同型な部分体を，K の**素体**という．

命題 7.6　p を素数とする．

(1) 体 K の標数が $p > 0$ ならば，任意の $a, b \in K$ に対して

$$(a + b)^p = a^p + b^p$$

が成り立つ．

(2) $\boldsymbol{F}_p$ 上の多項式 $f(X)$ に対して，

$$f(X)^p = f(X^p)$$

が成り立つ．

証明 (1) 二項定理より

$$(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}b + \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 + \cdots + \binom{p}{p-1}ab^{p-1} + b^p.$$

ここで，p は素数なので，$1 \leq j \leq p-1$ のときの二項係数は

$$\binom{p}{j} = \frac{p!}{j!\,(p-j)!} \equiv 0 \pmod{p}.$$

よって，K において $\binom{p}{j}a^j b^{p-j} = 0$ となり，求める等式を得る．

(2) $f(X)$ を具体的に

$$f(X) = c_n X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0 \qquad (c_i \in \boldsymbol{F}_p)$$

と表せば，(1) を繰り返し使って

$$f(X)^p = c_n^p X^{np} + c_{n-1}^p X^{(n-1)p} + \cdots + c_1^p X^p + c_0^p.$$

ここで，**フェルマーの定理**より $c_i^p = c_i$ が成り立つから，

$$f(X)^p = c_n (X^p)^n + c_{n-1}(X^p)^{n-1} + \cdots + c_1 X^p + c_0 = f(X^p)$$

を得る． □

定理 7.7 p を素数，$K/\boldsymbol{F}_p$ を n 次拡大とすると，K の元の個数は p^n である．

証明 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を K の $\boldsymbol{F}_p$ 上の基底とすれば，K の任意の元は

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \qquad (c_i \in \boldsymbol{F}_p)$$

の形に一意的に表され，各 c_i の取り方は p 通りだから，K の元の個数は p^n である．□

例 7.8 -1 は 3 を法として平方非剰余なので，X^2+1 は $\boldsymbol{F}_3$ 上既約である． したがって，§5 の考察から，2 次拡大 $K/\boldsymbol{F}_3$ がとれて，K において X^2+1 は根をもつ． 実際には K は剰余環 $\boldsymbol{F}_3[X]/(X^2+1)$ と同型であり，X の属する類に対応する K の元を α とすると，具体的に

$$K = \{\, 0,\, 1,\, 2,\, \alpha,\, 1+\alpha,\, 2+\alpha,\, 2\alpha,\, 1+2\alpha,\, 2+2\alpha \,\}.$$

と書ける． ただし，$\boldsymbol{F}_3 = \{0,1,2\}$ とする． このとき，$\alpha^2 = -1$ に注意すれば

$$(1+\alpha)(2\alpha) = 2\alpha + 2\alpha^2 = 2\alpha - 2 = 1 + 2\alpha$$

のように積が計算できる（すべての積をチェックして，K の乗積表を作成してみよ）．

例 7.9　任意の素数 p に対して，$\boldsymbol{F}_p$ 上の 2 次拡大体が存在することが以下のようにしてわかる．
(1)　任意の奇素数 p に対して，p を法として平方非剰余である整数 u が存在するから，前の例と同様にして，$\boldsymbol{F}_p[X]/(X^2-u)$ と同型な $\boldsymbol{F}_p$ 上の 2 次拡大体が存在する．
(3)　$p=2$ の場合，X^2+X+1 が $\boldsymbol{F}_2$ 上既約であるから，やはり $\boldsymbol{F}_2$ 上の 2 次拡大体が存在する．

例 7.10　p を素数とする．$f(X)$ を $\boldsymbol{F}_p$ 上の既約多項式，α をその根とすると $K=\boldsymbol{F}_p(\alpha)$ は $\boldsymbol{F}_p$ 上の n 次拡大体である．写像 ϕ を以下のように定める．

$$\phi : K \longrightarrow K, \qquad \alpha \mapsto \alpha^p.$$

(1)　ϕ は K から K への準同型写像である．
なぜなら，$\alpha,\beta \in K$ に対して，$\phi(\alpha\beta)=\phi(\alpha)\phi(\beta)$ はあきらかであり，さらに定理 7.6 から $\phi(\alpha+\beta)=\phi(\alpha)+\phi(\beta)$ もいえるから．

(2)　ϕ は $\boldsymbol{F}_p$ 上の同型写像である．すなわち $\phi \in \mathrm{Aut}(K/\boldsymbol{F}_p)$.
なぜなら，$a \in \boldsymbol{F}_p$ に対して $\phi(a)=a^p=a$ がいえるから（フェルマーの定理）．

(3)　自然数 j に対して，ϕ の j 個の合成を ϕ^j とする;

$$\phi^j = \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{j}$$

さらに $\phi^0=\mathrm{id}$（恒等写像）とする．$\phi^j \in \mathrm{Aut}(K/\boldsymbol{F}_p)$ である．

(4)　$0<j<n$ のとき，$\phi^j \neq \mathrm{id}$.
なぜなら，もし $\phi^j=\mathrm{id}$ ならば，すべての $\alpha \in K$ に対して $\alpha=\phi^j(\alpha)=\alpha^{p^j}$ だから，K のすべての元は多項式 $X^{p^j}-X$ の根である．しかし，例 7.7 より K の元の個数は p^n なので，p^j 次多項式の根だけでは尽くせないはずなので矛盾．

(5)　ϕ^j $(0 \le j < n)$ は互いに相異なる．
なぜなら，もし $\phi^j=\phi^k$ $(0 \le j < k < n)$ ならば $\phi^{k-j}=\mathrm{id}$ となって (4) に反する．

(6)　$\mathrm{Aut}(K/\boldsymbol{F}_p)=\{\mathrm{id},\phi,\phi^2,\ldots,\phi^{n-1}\}$.
なぜなら，(5) より右辺は n 個の元を持ち，それらが左辺に属しているので，$|\mathrm{Aut}(K/\boldsymbol{F}_p)| \ge n$.　一方，定理 6.14 より $|\mathrm{Aut}(K/\boldsymbol{F}_p)| \le [K:\boldsymbol{F}_p]=n$ だから，不等式はすべて等号であり，$\mathrm{Aut}(K/\boldsymbol{F}_p)$ は $\{\,\phi^j \mid j=0,1,\ldots,n-1\,\}$ と一致する．

(7)　ϕ を $\boldsymbol{F}_p$ 上の**フロベニウス写像**という．

§8. 分離拡大

定理 6.3 より，体 K 上の多項式 $f(X)$ は，$\overline{K}$ において $X-\alpha$ の形の 1 次式の積に分解される． 同じ 1 次式をまとめてしまえば

$$f(X) = c\,(X-\alpha_1)^{m_1}\,(X-\alpha_2)^{m_2}\cdots(X-\alpha_r)^{m_r}$$

と表すことができる． ただし，$c \in K$ かつ，α_i は相異なる $\overline{K}$ の元，m_i は自然数である． ここで，$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ は $f(X)$ の根であるが，とくに $m_i \geq 2$ であるような α_i を $f(X)$ の**重根**という．

定義 8.1　体 K 上の多項式 $f(X)$ が $\overline{K}$ において重根をもつとき，$f(X)$ は**非分離的**であるという． そうでないとき**分離的**であるという． 分離的な多項式を**分離多項式**ともいう．

いま，K 上の多項式 $f(X)$ が重根 α をもつとする． このとき

$$f(X) = (X-\alpha)^2 g(X) \qquad (g(X) \in \overline{K}[X])$$

とかけるので，両辺を**微分**すれば

$$f'(X) = 2(X-\alpha)g(X) + (X-\alpha)^2 g'(X),$$

したがって，$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ となる．

定理 8.2　K を標数 0 の体，または有限体とすると，K 上の任意の既約多項式 $f(X)$ は分離的である．

証明　K 上の既約多項式 $f(X)$ が重根 α をもつとする． まず，$f(X)$ は α の K 上の最小多項式の定数倍であり，一方で，上に述べたように $f'(\alpha) = 0$ が成り立つ． ここで，K が標数 0 の体ならば，$f'(X)$ が零多項式ではないので，$\deg f'(X) < \deg f(X)$ となって矛盾する． K の標数が $p > 0$ の場合も，$f'(X)$ が零多項式でなければ同様に矛盾する．$f'(X)$ が零多項式であるとすると，簡単な考察から

$$f(X) = c_o + c_1 X^p + c_2 X^{2p} + \cdots + c_m X^{mp} \qquad (c_i \in K)$$

と書けることが確かめられる． さらに K が有限体で $|K| = p^n$ $(n \geq 1)$ であれば，任意の $c \in K$ に対して $c^{p^n} = c$ が成り立つから，とくに $c_i = b_i^p$ $(b_i \in K)$ と表すことができ，したがって

$$f(X) = b_0^p + b_1^p X^p + b_2^p X^{2p} + \cdots + b_m^p X^{mp} = \left(b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots + b_m X^m\right)^p$$

となって，$f(X)$ の既約性に矛盾する． □

定義 8.3　K を体とする．$\alpha \in \overline{K}$ の K 上の最小多項式が分離的であるとき，α は K 上**分離的**であるという．

定理 8.4　K を体とする．$\alpha \in \overline{K}$ について，次は同値である．

(i) α は K 上分離的である．

(ii) $|\mathrm{Conj}(\alpha, K)| = [K(\alpha) : K]$ が成り立つ．

証明　α の K 上の最小多項式を $f(X)$ とすれば，

$$\begin{aligned} \alpha \text{ は } K \text{ 上分離的} &\iff f(X) \text{ は重根を持たない} \\ &\iff f(X) \text{ の根の個数は } \deg f \text{ と等しい} \\ &\iff |\mathrm{Conj}(\alpha, K)| = [K(\alpha) : K] \end{aligned}$$

最後の等式は，$[K(\alpha) : K] = \deg f$ から導かれる． □

補題 8.5　K を体とし，$\beta, \gamma \in \overline{K}$ とする．β が K 上分離的ならば，

$$K(\beta, \gamma) = K(\alpha)$$

をみたす $\alpha \in \overline{K}$ が存在する．

証明　K が有限体ならば，その有限次拡大体である $K(\beta, \gamma)$ も有限体なので，『体の乗法群の有限部分群は巡回群である』という命題（証明は補遺を参照）を使えば，$K(\beta, \gamma)^\times$ は巡回群である．α をその生成元とすれば，あきらかに $K(\beta, \gamma) = K(\alpha)$ が成り立つ．そこで，以下では K は無限体であるとする．このとき，β, γ から定まる有限集合

$$S = \left\{ \frac{\gamma - \gamma'}{\beta' - \beta} \,\middle|\, \beta \neq \beta' \in \mathrm{Conj}(\beta, K),\ \gamma' \in \mathrm{Conj}(\gamma, K) \right\}$$

に属さない $s \in K$ がとれる．$\alpha = \gamma + s\beta$ とおく．もし，$\beta \in K(\alpha)$ が示されれば，$\gamma = \alpha - s\beta \in K(\alpha)$ がいえて $K(\beta, \gamma) = K(\alpha)$ が得られる．そこで，以下，$\beta \notin K(\alpha)$，を仮定して矛盾を導く．いま，β は K 上分離的だから $K(\alpha)$ 上も分離的であり，したがって定理 8.4 より

$$|\mathrm{Conj}(\beta, K(\alpha))| = [K(\alpha, \beta) : K(\alpha)]$$

が成り立つが，$\beta \notin K(\alpha)$ を仮定したから右辺は 1 より大きくなっている．よって，$\beta' \neq \beta$ である $\beta' \in \mathrm{Conj}(\beta, K(\alpha))$ がとれる．ここで，$\mathrm{Conj}(\beta, K(\alpha)) \subset \mathrm{Conj}(\beta, K)$ だから $\beta' \in \mathrm{Conj}(\beta, K)$ であることにも注意する．いま，$g(X)$ を γ の K 上の最小多項式とし，$G(X) = g(\alpha - sX)$ とおくと，

$$G(\beta) = g(\alpha - s\beta) = g(\gamma) = 0.$$

一方，$G(X)$ は $K(\alpha)$ 上の多項式だから，β の $K(\alpha)$ 上の最小多項式で割り切れ，したがって $G(\beta') = 0$ が成り立つ．よって，$g(\alpha - s\beta') = 0$ より，$\alpha - s\beta' \in \mathrm{Conj}(\gamma, K)$．そこで $\gamma' = \alpha - s\beta'$ とおけば

$$\gamma' = (\gamma + s\beta) - s\beta', \qquad \therefore\ s = \frac{\gamma - \gamma'}{\beta' - \beta} \in S$$

となるが，これは s の取り方に矛盾する． □

定義 8.6　代数拡大 L/K において，すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき，L/K を**分離拡大**という．また，このとき L は K 上**分離的**であるともいう．

定理 8.7 (原始元定理) 任意の有限次分離拡大は単純拡大である．すなわち L/K が有限次分離拡大ならば，$L = K(\alpha)$ をみたす $\alpha \in L$ が存在する．

証明　次数 $[L : K]$ に関する数学的帰納法で示す．$[L : K] = 1$ すなわち $L = K$ のときはあきらか．以下，$[L : K] > 1$ とし，次数が $[L : K]$ より小さい場合は成り立つと仮定する（帰納法の仮定）．$[L : K] > 1$ より，$\beta \notin K$ である $\beta \in L$ が存在する．このとき

$$[L : K(\beta)] < [L : K] \quad \text{かつ} \quad L/K(\beta) \text{ は分離拡大}$$

だから，帰納法の仮定より $L = K(\beta, \gamma)$ をみたす $\gamma \in L$ が存在する．そこで，前補題を適用すれば，定理の主張を得る．□

定理 8.8　K を標数 0 の体，または有限体とする．

(1) K 上のすべての既約多項式は分離的である．
(2) K 上のすべての代数拡大体は分離的である．
(3) K 上のすべての有限次拡大体は単純である．

証明　定理 8.2 および定理 8.7 からすぐに得られる．□

次の補題は，定理 6.12 を使って証明される（補遺を参照）．

補題 8.9　体 K 上代数的である α, β が，$\beta \in K(\alpha)$ をみたすならば，

$$|\mathrm{Conj}(\alpha, K)| = |\mathrm{Conj}(\alpha, K(\beta))|\,|\mathrm{Conj}(\beta, K)|$$

が成り立つ．

命題 8.10　体 K 上分離的である α に対して，$K(\alpha)/K$ は分離拡大である．

証明　任意の $\beta \in K(\alpha)$ について，β が K 上分離的であることを確かめればよい．そのために，まず，定理 6.14 より，

$$|\mathrm{Conj}(\alpha, K(\beta))| \le [K(\alpha) : K(\beta)], \qquad |\mathrm{Conj}(\beta, K)| \le [K(\beta) : K].$$

よって，前補題から

$$|\mathrm{Conj}(\alpha, K)| \le [K(\alpha) : K(\beta)][K(\beta) : K] = [K(\alpha) : K]$$

であるが，α は K 上分離的だから，定理 8.4 より最左辺は $[K(\alpha) : K]$ に等しく，したがって，3 つの不等号はすべて等号に置き換わる．とくに $|\mathrm{Conj}(\beta, K)| = [K(\beta) : K]$ だから，再び定理 8.4 より β は K 上分離的である．□

定理 8.11　M を代数拡大 L/K の中間体とするとき，次は同値である．

(i) L/K は分離拡大である．

(ii) L/M, M/K はともに分離拡大である．

証明　(i) ならば (ii) は明らかなので，以下では (ii) を仮定して (i)，すなわち，任意の $\gamma \in L$ が K 上分離的であることを示す．

M/K が有限次拡大の場合: M/K が有限次分離拡大だから，原始元定理（定理 8.7）より，$M = K(\beta)$ をみたす $\beta \in M$ が存在する． このとき $M(\gamma) = K(\beta, \gamma)$ であるが，(ii) より β は K 上分離的なので，補題 8.5 より，$M(\gamma) = K(\alpha)$ をみたす $\alpha \in M(\gamma)$ が存在する． さらに (ii) より α が M 上分離的であることもわかるから，定理 8.4 から

$$|\mathrm{Conj}(\beta, K)| = [K(\beta) : K], \qquad |\mathrm{Conj}(\alpha, M)| = [M(\alpha) : M] = [K(\alpha) : K(\beta)].$$

ここで，$\beta \in K(\alpha)$ より，補題 8.9 が適用できることに注意して

$$\begin{aligned}[K(\alpha) : K] &= [K(\alpha) : K(\beta)][K(\beta) : K] \\ &= |\mathrm{Conj}(\alpha, K(\beta))|\,|\mathrm{Conj}(\beta, K)| = |\mathrm{Conj}(\alpha, K)|\,.\end{aligned}$$

よって，定理 8.4 と命題 8.10 から，$K(\alpha)/K$ は分離拡大である． したがって $K(\alpha)$ の元である γ は K 上分離的であることが確かめられた．

M/K が無限次拡大の場合: γ の M 上の最小多項式の係数をすべて K に添加した体を M_0 とする． M_0 は M/K の中間体であり，仮定 (ii) より，γ は M_0 上分離的，かつ M_0/K は有限次分離拡大である． そこで，M を M_0 に置き換えて上の議論を適用すればよい． □

命題 8.12　K を体とし，$\alpha, \beta \in \overline{K}$ が K 上分離的であるとする． このとき，$K(\alpha, \beta)/K$ は分離拡大である． とくに，$\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta$ はどれも K 上分離的である．

証明　命題 8.10 より，$K(\alpha)/K$ は分離拡大，さらに，β は $K(\alpha)$ 上も分離的だから，$K(\alpha, \beta)/K(\alpha)$ も分離拡大である． よって，前定理より結論を得る． □

定理 8.13　L, E がともに K 上分離的ならば，LE, $L \cap E$ はどちらも K 上分離的である．

証明　LE の元は $L \cup E$ の有限個の元から加減乗除によって表されるから，前命題によって K 上分離的であることがわかり，したがって LE/K は分離拡大である． $(L \cap E)/K$ が分離拡大であることは明らかである． □

§9. 正規拡大

定理 9.1 代数拡大 L/K について，次は同値である．

(i) すべての $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して $\sigma(L) \subset L$.
(ii) すべての $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して $\sigma(L) = L$.
(iii) すべての $\alpha \in L$ に対して $\mathrm{Conj}(\alpha, K) = \{\, \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathrm{Aut}(L/K) \,\}$.
(iv) すべての $\alpha \in L$ に対して $\mathrm{Conj}(\alpha, K) \subset L$.

証明 (i)⇒(ii): $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ ならば，$\sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ でもあるから，$\sigma^{-1}(L) \subset L$ が (i) より得られ，$L = \sigma(\sigma^{-1}(L)) \subset \sigma(L)$. よって (ii) が導かれた.
(ii)⇒(iii): $\alpha \in L$ とし，その K 上の最小多項式を $f(X)$ とする．任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ に対して，$f(\sigma(\alpha)) = \sigma(f(\alpha)) = \sigma(0) = 0$ より，$\sigma(\alpha) \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$,

$$\therefore \quad \{\, \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathrm{Aut}(L/K) \,\} \subset \mathrm{Conj}(\alpha, K).$$

逆の包含関係を示すために，$\beta \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ とすると，定理 6.12（または系 6.13）から，$\beta = \tau(\alpha)$ をみたす $\tau \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ がとれる． このとき (ii) より $\tau(L) = L$ なので，$\sigma = \tau|_L$ とおけば，$\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ であって，かつ $\beta = \tau(\alpha) = \sigma(\alpha)$ であるから，逆の包含関係が示された.
(iii)⇒(iv): $\alpha \in L$ ならば $\{\, \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathrm{Aut}(L/K) \,\} \subset L$，よって (iii) より (iv) を得る.
(iv)⇒(i): $\alpha \in L$ とすると，系 6.13 より，$\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ のとき $\sigma(\alpha) \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$. よって (iv) より $\sigma(\alpha) \in L$ となり，(i) が得られた. □

定義 9.2 前定理の条件が成り立つような代数拡大 L/K を**正規拡大**という． L は K 上**正規**であるともいう.

定義 9.3 体 K 上の多項式 $f(X)$ に対して，その根すべてを K に添加して得られる体を $f(X)$ の K 上の**最小分解体**という（それは K の代数拡大体，すなわち $\overline{K}$ の部分体になっている）.

例 9.4 α が K 上代数的であるとき，α の K 上の最小多項式の K 上の最小分解体は $K(\mathrm{Conj}(\alpha, K))$ で与えられる.

定理 9.5 代数拡大 L/K について，次は同値である.

(i) L/K は有限次正規拡大である.
(ii) L は K 上のある多項式の K 上の最小分解体である.

証明 (i)⇒(ii): L/K は有限次拡大だから，K 上代数的な有限個の $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ によって $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ と表される． L/K が正規であるという仮定より $\mathrm{Conj}(\alpha_i, K) \subset L$ が成り立つ． 一方，$f_i(X)$ を α_i の K 上の最小多項式とすると，$\mathrm{Conj}(\alpha_i, K)$ は $f_i(X)$ の根全体の集合と一致する． したがって，

$$f(X) = f_1(X) \cdots f_n(X)$$

とおくと，その K 上の最小分解体は

$$K(\mathrm{Conj}(\alpha_1, K) \cup \cdots \cup \mathrm{Conj}(\alpha_n, K)) \subset L$$

であるが，左辺が $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = L$ を含むのはあきらかなので (ii) が得られた．
(ii)⇒(i): L が $f(X) \in K[X]$ の K 上の最小分解体であるとする． すなわち，$f(X)$ の根全体の集合を A とすれば，$L = K(A)$ が成り立つ． いま，$\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ を任意にとる． $\alpha \in A$ ならば，定理 6.12 より $\sigma(\alpha) \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ であり，さらに α の K 上の最小多項式は $f(X)$ の因子だから，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) \subset A$，よって $\sigma(A) \subset A$ が成り立つ（実際には $\sigma(A) = A$ がいえる）． したがって，定理 9.1 の (i) より，L は K 上正規である．□

例 9.6 ω を 1 の原始 3 乗根とし，

$$K = \boldsymbol{Q}(\omega), \quad M = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt[3]{5}\right), \quad L = KM = \boldsymbol{Q}\left(\omega, \sqrt[3]{5}\right)$$

とおく． $K = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{-3}\right)$, $L = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt[3]{5}, \sqrt{-3}\right)$ とも表せることに注意.

(a) K は，$X^2 + X + 1$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小分解体であり，$\boldsymbol{Q}$ 上正規である.
(b) L は，$X^3 - 5$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小分解体であり，$\boldsymbol{Q}$ 上正規である.
(c) M は，$\mathrm{Conj}(\sqrt[3]{5}, \boldsymbol{Q}) = \left\{ \sqrt[3]{5}, \omega\sqrt[3]{5}, \omega\sqrt[3]{5}, \right\} \not\subset M$ より，$\boldsymbol{Q}$ 上正規ではない.

定理 9.7 α が体 K 上代数的であるとき，次は同値である.

(i) $K(\alpha)/K$ は正規拡大である.
(ii) $K(\alpha)$ は α の K 上の最小多項式の K 上の最小分解体である.
(iii) $K(\alpha) = K(\mathrm{Conj}(\alpha, K))$ が成り立つ.
(iv) $|\mathrm{Aut}(K(\alpha)/K)| = |\mathrm{Conj}(\alpha, K)|$ が成り立つ.

証明 (i)⇒(iv): 定理 6.14 の証明で見たように，単射

$$\Phi : \mathrm{Aut}(K(\alpha)/K) \longrightarrow \mathrm{Conj}(\alpha, K), \qquad \sigma \mapsto \sigma(\alpha)$$

が定まる． いま，$\beta \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ を任意にとれば，仮定 (i) より $\beta \in K(\alpha)$ だから $K(\beta) \subset K(\alpha)$，さらに K 上の次数を考えることにより $K(\beta) = K(\alpha)$ である． 一方，定理 6.12 より $\tau(\alpha) = \beta$ をみたす $\tau \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が存在する． そこで，$\sigma = \tau|_{K(\alpha)}$ とおけば，

$$\sigma(K(\alpha)) = K(\sigma(\alpha)) = K(\beta) = K(\alpha),$$

よって $\sigma \in \mathrm{Aut}(K(\alpha)/K)$ であって，もちろん $\sigma(\alpha) = \beta$． したがって，上記写像 Φ が全単射であることがわかり，(iv) を得る．
(iv)⇒(iii): 上で定めた Φ は，仮定 (iv) より全単射である． すなわち，$\beta \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ ならば，$\sigma(\alpha) = \beta$ をみたす $\sigma \in \mathrm{Aut}(K(\alpha)/K)$ が存在し，とくに $\beta \in K(\alpha)$． したがって

$$K(\mathrm{Conj}(\alpha, K)) \subset K(\alpha).$$

逆の包含関係はあきらかだから，(iii) が示された．
(iii)⇒(ii): は最小分解体の定義より直ちにわかる．
(ii)⇒(i): も定理 9.5 よりあきらかである． □

例 9.8 (1) 任意の体 K の任意の 2 次拡大体は K 上正規である．

(2) $\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q}$ を 3 次拡大とすると，α の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式 $f(X)$ は 3 次式である．

(a) $\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q}$ が正規拡大ならば，$f(X)$ の 3 根はすべて実数である．
(b) $f(X)$ の実根がただひとつならば，$\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q}$ は正規ではない．

例 9.9 3 次既約多項式 $g(X) = X^3 - 3X + 1$ の任意のひとつの根を β とすると，$\boldsymbol{Q}(\beta)/\boldsymbol{Q}$ は正規拡大である． 実際，

$$g\left(\frac{1}{1-\beta}\right) = -\frac{g(\beta)}{(1-\beta)^3} = 0, \qquad g\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = -\frac{g(\beta)}{\beta^3} = 0$$

より，$g(X)$ の他の 2 根が $\dfrac{1}{1-\beta}$, $1 - \dfrac{1}{\beta}$ であることが確かめられるので，$\boldsymbol{Q}(\beta)$ は $g(X)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小分解体，よって定理 9.7 より正規であることがわかる．

例 9.10 自然数 n に対して ζ_n を 1 の原始 n 乗根とする． すなわち，$\zeta_n \in \boldsymbol{C}^\times$ であって，その（乗法群 $\boldsymbol{C}^\times$ における）位数が n であるとする（$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ であるとしてよい）． このとき，$\boldsymbol{Q}(\zeta_n)$ は $\boldsymbol{Q}$ 上正規である． 実際，$\boldsymbol{Q}(\zeta_n)$ は $X^n - 1$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小分解体である．

例 9.11 $\boldsymbol{Q}$ 上の拡大体 K が $\zeta_n \in K$ をみたすとき，任意の $a \in K$ に対して $K(\sqrt[n]{a})/K$ は正規拡大である． 実際，L を $X^n - a$ の K 上の最小分解体とすると，

$$L = K\big(\sqrt[n]{a},\ \zeta_n\sqrt[n]{a},\ \ldots,\ \zeta_n^{n-1}\sqrt[n]{a}\big).$$

ここで，$\zeta_n \in K$ に注意すれば，任意の $j = 0, 1, \ldots, n-1$ に対して $\zeta_n^j \sqrt[n]{a} \in K(\sqrt[n]{a})$，よって $L = K(\sqrt[n]{a})$ であり，これは K 上正規である．

定理 9.12　L/K を正規拡大とすると，任意の中間体 M に対して L/M は正規拡大である．

証明　$\alpha \in L$ のとき，$\mathrm{Conj}(\alpha, M) \subset \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ だから，定理 9.1 (iv) を使えばよい．□

注意　　正規拡大 L/K の中間体 M は，一般には K 上正規にはならない． 例 9.6 を参照.

定理 9.13　L, E がともに K 上正規ならば，LE, $L \cap E$ はどちらも K 上正規である．

証明　定理 9.1 の条件 (i) を使う． $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して，仮定より $\sigma(L) \subset L$, $\sigma(E) \subset E$. よって，$\sigma(LE) \subset \sigma(L)\sigma(E) \subset LE$ かつ $\sigma(L \cap E) \subset \sigma(L) \cap \sigma(E) \subset L \cap E$ よりOK. □

定理 9.14　L/K を正規拡大とすると，任意の拡大 F/K に対して LF/F は正規拡大である．

証明　$\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{F}/F)$ に対して，$\sigma|_{\overline{K}} \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が成り立つことを確かめるのは難しくない． よって，L/K が正規であるという仮定より $\sigma(L) \subset L$ となるので，$\sigma(LF) = \sigma(L)\sigma(F) \subset LF$ が得られ，LF/F は正規である． □

定義 9.15　代数拡大 L/K に対して，L を含む K 上の最小の正規拡大体を L/K の**正規閉包**という．

命題 9.16　α が K 上代数的であるとき，$K(\alpha)/K$ の正規閉包は $K(\mathrm{Conj}(\alpha, K))$ である．

証明　L を $K(\alpha)$ の正規閉包とする． 例 9.4 と定理 9.5 より，$K(\mathrm{Conj}(\alpha, K))$ は K 上正規だから，最小の正規拡大である L は $K(\mathrm{Conj}(\alpha, K))$ に含まれる． 一方，$\alpha \in L$ だから，定理 9.1 の条件 (iv) より，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) \subset L$，したがって $K(\mathrm{Conj}(\alpha, K)) \subset L$. よって $L = K(\mathrm{Conj}(\alpha, K))$ を得る． □

§10. ガロア拡大

定義 10.1　分離拡大かつ正規拡大である体の拡大を**ガロア拡大**という．L/K がガロア拡大のとき，$\mathrm{Aut}(L/K)$ をとくに $\mathrm{Gal}(L/K)$ と表し，L/K の**ガロア群**，または L の K 上のガロア群という．

定理 10.2　有限次拡大 L/K に対して，次は同値である．

(i) L/K はガロアである．
(ii) L は K 上のある分離多項式の K 上の最小分解体である．
(iii) $|\mathrm{Aut}(L/K)| = [L : K]$ が成り立つ．

証明　(i)⇒(ii): 仮定 (i) より，とくに L/K は有限次分離拡大，よって定理 8.7 より，ある $\alpha \in L$ を用いて $L = K(\alpha)$ とかける． α は K 上分離的だからその最小多項式 $f(X) \in K[X]$ は分離多項式である． $f(X)$ の K 上の最小分解体は $K(\mathrm{Conj}(\alpha, K))$ だが，L/K は正規だから $\mathrm{Conj}(\alpha, K) \subset L$，よって，

$$L = K(\alpha) \subset K(\mathrm{Conj}(\alpha, K)) \subset L$$

から (ii) が得られる．
(ii)⇒(i): L が K 上の分離多項式 $f(X)$ の K 上の最小分解体であるとする． このとき，定理 9.5 より L/K は正規拡大である． 一方，$f(X)$ の根すべてを $\alpha_i\,(i = 1, \ldots, r)$ とすれば，$L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ と表されるが，各 α_i は K 上分離的なので，命題 8.12 および定理 8.11 を繰り返し適用すれば，L/K が分離的であることが導かれる．
(i)⇔(iii): （一般的に証明するのは少し面倒なので，L/K が単純拡大，すなわち $L = K(\alpha)$ の場合にのみ示す.） 定理 6.14 より，一般に

$$|\mathrm{Aut}(K(\alpha)/K)| \leq |\mathrm{Conj}(\alpha, K)| \leq [K(\alpha) : K]$$

が成り立っている． ここで，定理 9.7 より，はじめの不等式が等式になるためには $K(\alpha)/K$ が正規であることが必要十分条件である． さらに，定理 8.4 および命題 8.10 から，あとの不等式が等式になるための必要十分条件は $K(\alpha)/K$ が分離拡大であることがわかる． これらから，(i)，(iii) の同値性が導かれる． □

定義 10.3　L を体とする． L からある体への単射準同型写像の集合 A に対して，

$$L^A = \{\, x \in L \mid \text{任意の } \sigma \in A \text{ に対して } \sigma(x) = x \,\}$$

を A の**不変体**という．

A の元が単射準同型写像であることを用いれば，不変体 L^A は L の部分体であることが確かめられる． 次の補題は，不変体の定義からすぐに示すことができる．

補題 10.4　L/K を体の拡大とする．

(1) L/K の任意の中間体 M に対して，$M \subset L^{\mathrm{Aut}(L/M)}$ が成り立つ．

(2) $\mathrm{Aut}(L/K)$ の任意の部分群 H に対して，$H \subset \mathrm{Aut}(L/L^H)$ が成り立つ．

定理 10.5　代数拡大 L/K がガロアであるためには，$K = L^{\mathrm{Aut}(L/K)}$ であることが必要十分である．

証明　必要性:　$M = L^{\mathrm{Aut}(L/K)}$ とおくと，前補題 (1) から $K \subset M$ である．そこで，L/K がガロア，すなわち分離的かつ正規であることを仮定して，$M \subset K$ を導く．そのために $\alpha \in M$ を任意にとる．M の定義から，任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ に対して $\sigma(\alpha) = \alpha$ であるが，L/K は正規なので，定理 9.1 の性質 (iii) を用いれば，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) = \{\alpha\}$ が得られる．さらに，α は K 上分離的だから，定理 8.4 より

$$[K(\alpha) : K] = |\mathrm{Conj}(\alpha, K)| = 1, \qquad \therefore\ K(\alpha) = K$$

よって $\alpha \in K$ となるから，$M \subset K$ が導かれた．
十分性:　$K = L^{\mathrm{Aut}(L/K)}$ を仮定し，任意の $\alpha \in L$ に対して，

(♠)　　$|\mathrm{Conj}(\alpha, K)| = [K(\alpha) : K], \qquad \mathrm{Conj}(\alpha, K) \subset L$

を確かめればよい．なぜなら，前者の等式と定理 8.4 および命題 8.10 から L/K の分離性が，後者の包含関係と定理 9.1 の性質 (iv) から L/K の正規性が導かれるからである．いま，

$$B_\alpha = \{\, \sigma(\alpha) \,|\, \sigma \in \mathrm{Aut}(L/K) \,\}$$

とおけば，$B_\alpha \subset L$ であり，系 6.13 より

(♡)　　$B_\alpha \subset \left\{\, \sigma(\alpha) \,|\, \sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K) \,\right\} = \mathrm{Conj}(\alpha, K),$

よって，

(♢)　　$|B_\alpha| \le |\mathrm{Conj}(\alpha, K)| \le [K(\alpha) : K]$

が成り立つ．とくに，B_α は有限集合であり，L 上の多項式

$$f_\alpha(X) = \prod_{\beta \in B_\alpha} (X - \beta)$$

を定義することができる．ここで，任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ に対して

$$f_\alpha^\sigma(X) = \prod_{\beta \in B_\alpha} (X - \sigma(\beta)) = \prod_{\gamma \in \sigma(B_\alpha)} (X - \gamma)$$

であるが，$\sigma(B_\alpha) = B_\alpha$ に注意すれば，$f_\alpha^\sigma(X) = f_\alpha(X)$ であることがわかる．すなわち $f_\alpha(X)$ の係数は $L^{\mathrm{Aut}(L/K)} = K$ に属する;　$f_\alpha(X) \in K[X]$．さらに $f_\alpha(\alpha) = 0$ であるから，補題 3.4 より

$$[K(\alpha) : K] \le \deg f_\alpha(X) = |B_\alpha|\,.$$

よって，(♡) の包含関係と (♢) の不等号はすべて等号に置き換えられ，

$$\mathrm{Conj}(\alpha, K) = B_\alpha \subset L, \qquad |\mathrm{Conj}(\alpha, K)| = [K(\alpha) : K],$$

すなわち (♠) が確かめられた．　□

系 10.6　L/K をガロア拡大としそのガロア群を G とする．M を L/K の中間体とすると，L/M はガロア拡大でそのガロア群 $\mathrm{Gal}(L/M)$ は G の部分群であり，さらに $L^{\mathrm{Gal}(L/M)} = M$ が成り立つ．

証明　L/K の分離性から L/M が分離的であること（定理 8.11），また，L/K の正規性から L/M が正規拡大であること（定理 9.12）がわかるから，L/M はガロア拡大である．後半は前定理から導かれる．　□

定理 10.7　L/K を有限次ガロア拡大としそのガロア群を G とする．H を $\mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群とすると，L^H は L/K の中間体，したがって L/L^H はガロア拡大であり，さらに $\mathrm{Gal}(L/L^H) = H$ が成り立つ．

証明　$M = L^H$ とおく．L/M がガロア拡大であることは，系 10.6 で示されている．補題 10.4 (2) より $H \subset \mathrm{Gal}(L/M)$ であり，このことと定理 10.2 を用いて

$$|H| \leq |\mathrm{Gal}(L/M)| = |\mathrm{Aut}(L/M)| = [L : M].$$

一方，定理 8.7 より，$L = M(\alpha)$ をみたす $\alpha \in L$ がとれる．そこで，L 上の多項式

$$g_\alpha(X) = \prod_{\sigma \in H} (X - \sigma(\alpha))$$

を考えると，任意の $\sigma \in H$ に対して $g_\alpha^\sigma(X) = g_\alpha(X)$ であるから，$g_\alpha(X)$ の係数は $L^H = M$ に属する，すなわち $g_\alpha(X) \in M[X]$．さらに $g_\alpha(\alpha) = 0$ なので

$$[L : M] \leq \deg g_\alpha(X) = |H|\,.$$

したがって，上の不等式と合わせて $|H| = |\mathrm{Gal}(L/M)|$ であり，結局 $H = \mathrm{Gal}(L/M)$ を得る．　□

定理 10.8 (ガロア理論の基本定理)　有限次ガロア拡大 L/K に対して，そのガロア群を G とする．$\mathcal{M}_{L/K}$ を L/K の中間体全体の集合，$\mathcal{H}_G$ を G の部分群全体の集合とする;

$$\mathcal{M}_{L/K} = \{\, M \mid M \text{ は } L/K \text{ の中間体} \,\}, \qquad \mathcal{H}_G = \{\, H \mid H \text{ は } G \text{ の部分群} \,\}.$$

このとき，二つの写像

$$\mathcal{M}_{L/K} \longrightarrow \mathcal{H}_G, \qquad M \mapsto \mathrm{Gal}(L/M)$$

$$\mathcal{H}_G \longrightarrow \mathcal{M}_{L/K}, \qquad H \mapsto L^H$$

は互いに逆の全単射である．

証明　写像に名前を付けて，$\Phi : \mathcal{M}_{L/K} \to \mathcal{H}_G$ および $\Psi : \mathcal{H}_G \longrightarrow \mathcal{M}_{L/K}$ とする．このとき，任意の $M \in \mathcal{M}_{L/K}$)，$H \in \mathcal{H}_G$ に対して

$$\Psi(\Phi(M)) = M, \qquad \Phi(\Psi(H)) = H$$

を示せばよいが，これらはそれぞれ

$$L^{\mathrm{Gal}(L/M)} = M, \qquad \mathrm{Gal}(L/L^H) = H$$

のことであり，系 10.6，定理 10.7 ですでに示されている．　□

定義 10.9　有限次ガロア拡大 L/K に対してそのガロア群を G とする;

$$G = \mathrm{Gal}(L/K).$$

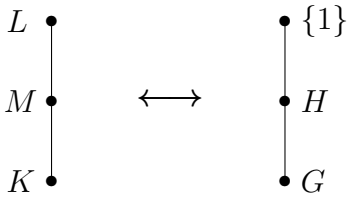
L/K の中間体 M と G の部分群 H の間に，

$$H = \mathrm{Gal}(L/M)$$

あるいは，これと同値な

$$M = L^H$$

の関係があるとき，M と H は互いに対応するという．この対応を**ガロア対応**という．とくに K は G に対応し，L は id_L ($= L$ 上の恒等写像) だけを元にもつ群（単位群）に対応する．今後，単位群を簡単に $\{1\}$ と略記することにする．



定義 10.10　L/K をガロア拡大，そのガロア群を G とする．

(1) G が巡回群のとき，L/K を**巡回拡大**という．

(2) G がアーベル群のとき，L/K を**アーベル拡大**という．

(3) G が可解群のとき，L/K を**可解拡大**という．

(4) G が中野群のとき，L/K を**中野拡大**という（ジョークです！ごめん）．

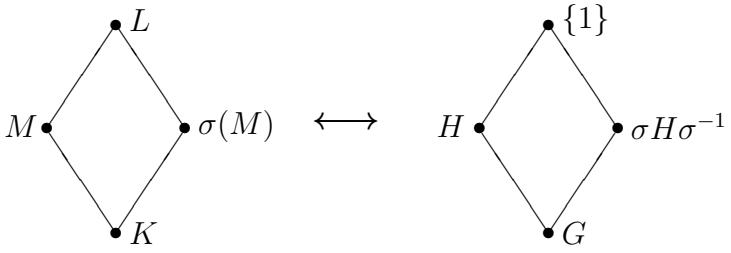
例 10.11　(1)　素数次ガロア拡大は巡回拡大である．なぜなら，素数位数の有限群は巡回群だから．

(2)　次数 5 以下のガロア拡大はアーベル拡大である．なぜなら，位数が 5 以下の有限群はすべてアーベル群だから．

(3)　次数 60 未満のガロア拡大は可解拡大である．なぜなら，位数が 60 未満の有限群はすべて可解群だから．

§11. ガロア対応

定理 11.1 L/K を有限次ガロア拡大とし，そのガロア群を G とする． M を L/K の中間体，H を M に対応する G の部分群とする． また，$\sigma \in G$ とする．このとき，$\sigma(M)$ は L/K の中間体であり，対応する G の部分群は $\sigma H \sigma^{-1}$ である．



証明 L/K は正規なので $\sigma(M) \subset \sigma(L) = L$，よって $\sigma(M)$ は L/K の中間体である．また，M と H が対応しているから $M = L^H$，すなわち $\alpha \in L$ に対して

$$\alpha \in M \iff \tau(\alpha) = \alpha \quad (\forall \tau \in H).$$

したがって，

$$\begin{aligned} \beta \in \sigma(M) \iff \sigma^{-1}(\beta) \in M &\iff \tau(\sigma^{-1}(\beta)) = \sigma^{-1}(\beta) \quad (\forall \tau \in H) \\ &\iff \sigma(\tau(\sigma^{-1}(\beta))) = \beta \quad (\forall \tau \in H) \\ &\iff (\sigma\tau\sigma^{-1})(\beta) = \beta \quad (\forall \tau \in H) \end{aligned}$$

そこで $\rho = \sigma\tau\sigma^{-1}$ と変数変換すれば，$\tau \in H \Leftrightarrow \rho \in \sigma H \sigma^{-1}$ となっているから

$$\beta \in \sigma(M) \iff \rho(\beta) = \beta \quad (\forall \rho \in \sigma H \sigma^{-1}),$$

このことは，中間体 $\sigma(M)$ が部分群 $\sigma H \sigma^{-1}$ に対応することを示している． □

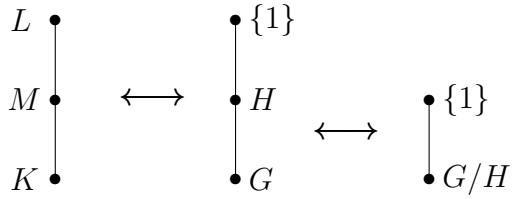
定理 11.2 L/K を有限次ガロア拡大とし，そのガロア群を G とする． M を L/K の中間体，H を M に対応する G の部分群とする． このとき，M/K がガロア拡大であるためには，H が G の正規部分群であることが必要十分である． またこのとき M/K のガロア群は G/H で与えられる． 詳しくは，制限写像

$$G = \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(M/K), \quad \sigma \mapsto \sigma|_M$$

から自然に同型

$$G/H = \mathrm{Gal}(L/K)/\mathrm{Gal}(L/M) \cong \mathrm{Gal}(M/K)$$

が引き起こされる．



証明 L/K がガロア拡大なので，とくに M/K は分離的である．したがって，M/K がガロアであるためには，正規であること，すなわち，任意の $\sigma \in G$ に対して $\sigma(M) = M$ が成り立つことが必要十分である．前定理を用いれば，

$$\sigma(M) = M \iff \sigma H \sigma^{-1} = H$$

であるが，右の等式が任意の $\sigma \in G$ に対して成り立つことは，H が G の正規部分群であることを示している．後半は，準同型定理から導かれる． □

系 11.3 L/K を有限次ガロア拡大，M をその任意の中間体とする．

(1) L/K が巡回拡大ならば，$L/M,\ M/K$ はともに巡回拡大である．

(2) L/K がアーベル拡大ならば，$L/M,\ M/K$ はともにアーベル拡大である．

(3) L/K が可解拡大ならば，L/M も可解拡大であり，さらに $\mathrm{Gal}(L/M)$ が $\mathrm{Gal}(L/K)$ の正規部分群ならば，M/K も可解拡大である．

証明 H を群 G の部分群とする．G がアーベル群ならば，H はアーベル群かつ G の正規部分群であって，剰余群 G/H もアーベル群である．このことと定理 11.2 から (2) が得られる．また，アーベル群を巡回群としても同様のことがいえるから (1) も成り立つ．(3) は，G が可解群のとき H も可解群であり，さらに H が G の正規部分群ならば剰余群 G/H も可解群になることから導かれる． □

定理 11.4 L/K を有限次ガロア拡大とし，そのガロア群を G とする．いま，L/K の中間体 M_1, M_2 がそれぞれ G の部分群 H_1, H_2 に対応しているとする．

(1) $M_1 \subset M_2$ と $H_1 \supset H_2$ は同値である．

(2) $M_1 \cap M_2$ に対応する部分群は $H_1 \cup H_2$ で生成される G の部分群である．

(3) 合成体 M_1M_2 に対応する部分群は $H_1 \cap H_2$ である．

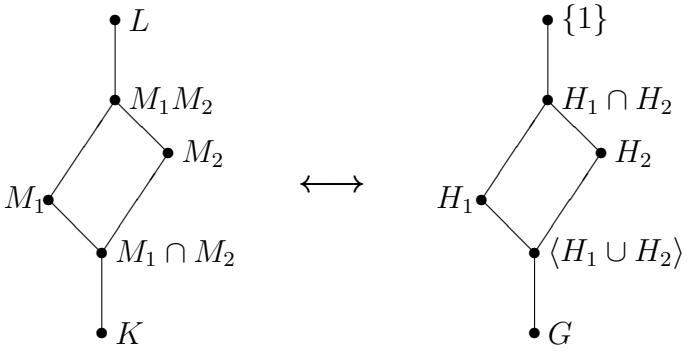
証明 (1) まず $M_1 \subset M_2$ を仮定する．$\sigma \in H_2 = \mathrm{Gal}(L/M_2)$ を任意にとると，

$$\sigma(x) = x \quad (\forall x \in M_2) \quad \text{より} \quad \sigma(x) = x \quad (\forall x \in M_1), \quad \therefore \sigma \in \mathrm{Gal}(L/M_1) = H_1$$

よって $H_2 \subset H_1$ を得る．逆に $H_2 \subset H_1$ を仮定する．$x \in M_1 = L^{H_1}$ を任意にとると，

$$\sigma(x) = x \quad (\forall \sigma \in H_1) \quad \text{より} \quad \sigma(x) = x\ (\forall \sigma \in H_2), \quad \therefore x \in L^{H_2} = M_2$$

よって $M_1 \subset M_2$ を得る．
(2) $M_1 \cap M_2$ は M_1, M_2 に含まれる最大の体だから，(1) より，対応する部分群は H_1, H_2 を含む最小の群であり，それは $H_1 \cup H_2$ で生成される G の部分群である．
(3) M_1M_2 は M_1, M_2 を含む最小の体だから，(1) より，対応する部分群は H_1, H_2 に含まれる最大の部分群 $H_1 \cap H_2$ である．



□

定理 11.5　M_1, M_2 がともに K 上の有限次ガロア拡大体であるとする．

(1) M_1M_2 および $M_1 \cap M_2$ はともに K 上ガロアである．
(2) $\mathrm{Gal}(M_1M_2/K)$ は直積 $\mathrm{Gal}(M_1/K) \times \mathrm{Gal}(M_2/K)$ の部分群に同型である．
(3) $M_1 \cap M_2 = K$ ならば，自然な同型

$$\mathrm{Gal}(M_1M_2/K) \cong \mathrm{Gal}(M_1/K) \times \mathrm{Gal}(M_2/K)$$

が存在する．

証明　(1) は，定理 8.13 から分離性が，定理 9.13 から正規性が導かれることからわかる．(2) と (3) を示すために，準同型写像

$$\Gamma : \mathrm{Gal}(M_1M_2/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(M_1/K) \times \mathrm{Gal}(M_2/K), \quad \sigma \mapsto (\sigma|_{M_1}, \sigma|_{M_2})$$

を考える．いま，$\sigma \in \mathrm{Ker}\,\Gamma$ ならば，$\sigma|_{M_1} = \mathrm{id}_{M_1}$，$\sigma|_{M_2} = \mathrm{id}_{M_2}$ だから，$\sigma = \mathrm{id}_{M_1M_2}$，したがって $\mathrm{Ker}\,\Gamma = \{\mathrm{id}_{M_1M_2}\} = \{1\}$，すなわち Γ は単射であり (2) が得られた．次に，$G = \mathrm{Gal}(M_1M_2/K)$ とおき，M_1, M_2 に対応する G の部分群を H_1, H_2 とする．M_1, M_2 は K 上ガロアだから，定理 11.2 より，H_1, H_2 は G の正規部分群であり，

$$\mathrm{Gal}(M_1/K) \cong G/H_1, \qquad \mathrm{Gal}(M_2/K) \cong G/H_2,$$

したがって，上で定義した単射準同型写像 Γ は

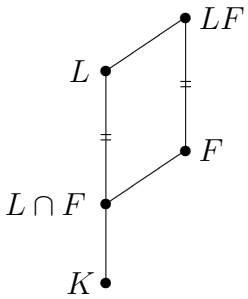
$$\Gamma : G \longrightarrow G/H_1 \times G/H_2$$

と書き換えることができる．一方，H_1, H_2 の正規性から，$H_1 \cup H_2$ で生成される群は

$$H_1H_2 = \{\, h_1h_2 \,|\, h_1 \in H_1,\, h_2 \in H_2 \,\}$$

と表すことができる． ここで，定理 11.4 (3) より，$H_1 \cap H_2$ は M_1M_2 に対応するから単位群，すなわち $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ である． よって，H_1H_2 は直積群 $H_1 \times H_2$ と同型であり，さらに $M_1 \cap M_2$ に対応していることが定理 11.4 (2) からわかる． そこで，とくに $M_1 \cap M_2 = K$ の場合を考えると，$G = H_1H_2 \cong H_1 \times H_2$ であって，G の位数と $G/H_1 \times G/H_2$ の位数は等しくなる． よってこの場合，Γ は同型写像になり (3) が確かめられた． □

定理 11.6 L/K が有限次ガロア拡大ならば，K 上の任意の拡大体 F に対して，LF/F はガロア拡大であり，ガロア群は $\mathrm{Gal}(L/(L\cap F))$ と自然に同型となる． とくに $\mathrm{Gal}(LF/F)$ は $\mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群と同型である．



証明 L/K は有限次分離拡大だから，原始元定理（定理 8.7）より，$L = K(\alpha)$ とかける．このとき，α は K 上分離的だから F 上ももちろん分離的であり，さらに $LF = F(\alpha)$ だから，命題 8.10 より LF は F 上分離的である． 一方，定理 9.14 より LF は F 上正規でもあるから，LF/F はガロア拡大である． 次に，準同型写像

$$\Delta : \mathrm{Gal}(LF/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K), \quad \sigma \mapsto \sigma|_L$$

を考える． いま，$\sigma \in \mathrm{Ker}\,\Delta$ とすると $\sigma|_L = \mathrm{id}_L$ だが，もともと σ は F 上の写像なので $\sigma|_F = \mathrm{id}_F$，したがって $\sigma = \mathrm{id}_{LF}$ であり，$\mathrm{Ker}\,\Delta = \{\mathrm{id}_{LF}\} = \{1\}$ を得る． よって Δ は単射である． そこで，

$$\mathrm{Im}\,\Delta = \mathrm{Gal}(L/L\cap F)$$

を示せば証明は完了する． そのためには，ガロア拡大 L/K において，$\mathrm{Im}\,\Delta$ に対応する中間体 $L^{\mathrm{Im}\,\Delta}$ が $L \cap F$ に一致することを確かめればよい． まず，F の元は $\mathrm{Gal}(LF/F)$ で不変だから，$L \cap F$ の元は $\mathrm{Im}\,\Delta$ で不変，すなわち $L \cap F \subset L^{\mathrm{Im}\,\Delta}$ が成り立つ． 一方，

$$L^{\mathrm{Im}\,\Delta} \subset (LF)^{\mathrm{Gal}(LF/F)} = F$$

に注意すれば，$L^{\mathrm{Im}\,\Delta} \subset L \cap F$ が得られるから，$L^{\mathrm{Im}\,\Delta} = L \cap F$ が確かめられた． □

§12. ガロア対応の例

例 12.1（$\boldsymbol{Q}$ 上の 2 次拡大） $\boldsymbol{Q}$ 上の 2 次拡大体 L はガロア拡大であり，$\alpha \notin \boldsymbol{Q}$ である $\alpha \in L$ をとれば，$L = \boldsymbol{Q}(\alpha)$ である． α の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式を

$$f(X) = X^2 + bX + c \qquad (b, c \in \boldsymbol{Q})$$

とする． したがって，α は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

のどちらかであり，どちらにしろ，$L = \boldsymbol{Q}\big(\sqrt{b^2 - 4c}\big)$ である． 有理数 $b^2 - 4c$ の分母を s とすれば，$s^2(b^2 - 4c) \in \boldsymbol{Z}$ かつ $L = \boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{s^2(b^2 - 4c)}\Big)$ でもあるから，

$$L = \boldsymbol{Q}\big(\sqrt{m}\big) \qquad (m \in \boldsymbol{Z})$$

と表すことができる． ここで，もし m が平方数 l^2 で割れて $m = l^2 m'$ ならば $L = \boldsymbol{Q}\big(\sqrt{m'}\big)$ とできる． そこで，はじめから m は平方因子を持たない，つまり

$$m = -1 \text{ または } \pm p_1 p_2 \dots p_r \qquad (p_i \text{ は相異なる素数})$$

と表される整数であるとしてよい．

さて，$\sqrt{m}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の共役元は，$\sqrt{m}, -\sqrt{m}$ なので，定理 6.12 より，2 つの同型写像，すなわち $\mathrm{Gal}(L/\boldsymbol{Q})$ の元で

$$\sqrt{m} \mapsto \sqrt{m}, \qquad \sqrt{m} \mapsto -\sqrt{m}$$

をみたすものが存在する． 前者は恒等写像 $\mathrm{id}_L (= 1$ と略す$)$ である． 後者を σ とすると，$\sigma(\sqrt{m}) = -\sqrt{m}$，より詳しく

$$\sigma : L \longrightarrow L, \qquad a + b\sqrt{m} \mapsto a - b\sqrt{m} \quad (a, b \in \boldsymbol{Q})$$

となっている． ここで，

$$\sigma^2(a + b\sqrt{m}) = \sigma(a - b\sqrt{m}) = \sigma(a + (-b)\sqrt{m}) = a - (-b\sqrt{m}) = a + b\sqrt{m}$$

より $\sigma^2 = \mathrm{id}_L = 1$ が成り立っている． 以上をまとめて，2 次拡大 $L/\boldsymbol{Q}$ のガロア群として位数 2 の巡回群

$$\mathrm{Gal}(L/\boldsymbol{Q}) = \{1, \sigma\}$$

が得られたことになる．

例 12.2（$\boldsymbol{Q}$ 上の 4 次アーベル拡大（ただし巡回拡大でない） $\boldsymbol{Q}$ 上の拡大体

$$L = \boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{2}, \sqrt{3}\Big)$$

を考える． $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ とおけば，$L = \boldsymbol{Q}(\alpha)$ と書ける． $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の共役元は，それぞれ $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$ だから，α の $\boldsymbol{Q}$ 上の共役元は $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ (複号任意) のどれかである． 一方，$|\mathrm{Conj}(\alpha, \boldsymbol{Q})| = [L : \boldsymbol{Q}] = \big[\boldsymbol{Q}\big(\sqrt{2}, \sqrt{3}\big) : \boldsymbol{Q}\big] = 4$ だから，

$$\mathrm{Conj}(\alpha, \boldsymbol{Q}) = \Big\{\sqrt{2} + \sqrt{3}, -\sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{2} - \sqrt{3}, -\sqrt{2} - \sqrt{3}\Big\}$$

でなければならない． これら 4 つの共役元はあきらかに $L = \boldsymbol{Q}\big(\sqrt{2}, \sqrt{3}\big)$ に属する（このことは

$$-\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{1}{\alpha}, \quad \sqrt{2} - \sqrt{3} = -\frac{1}{\alpha}, \quad -\sqrt{2} - \sqrt{3} = -\alpha$$

からもわかる）ので，$L/\boldsymbol{Q}$ は正規拡大であり，したがってガロア拡大である（標数 0 なので分離拡大である）． G をガロア群とする; $G = \mathrm{Gal}(L/\boldsymbol{Q})$． $L/\boldsymbol{Q}$ の中間体

$$M_2 = \boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{2}\Big), \qquad M_3 = \boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{3}\Big)$$

に対応する G の部分群を H_2, H_3 とする． すなわち

$$H_2 = \mathrm{Gal}(L/M_2), \qquad H_3 = \mathrm{Gal}(L/M_3),$$

または，これらと同値だが

$$M_2 = L^{H_2}, \qquad M_3 = L^{H_3}$$

が成り立っている．

$$[L : M_2] = \frac{[L : \boldsymbol{Q}]}{[M_2 : \boldsymbol{Q}]} = \frac{4}{2} = 2, \qquad [L : M_3] = \frac{[L : \boldsymbol{Q}]}{[M_3 : \boldsymbol{Q}]} = \frac{4}{2} = 2$$

より，H_2, H_3 はどちらも位数 2 の群，したがって巡回群である． そこで，それらの生成元をそれぞれ $\tau, \sigma \in G$ とする;

$$H_2 = \langle\tau\rangle, \qquad H_3 = \langle\sigma\rangle.$$

$\sqrt{2} \in M_2$ かつ M_2 は H_2 の不変体だから，$\tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ である． ここで，もし $\tau(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ だとすると，L 全体が H_2 で不変になるから，$M_2 = K^{H_2} = L$ となって矛盾する． よって $\tau(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ でなければならない． H_3 についても同様に考えて，

$$\begin{aligned} \sigma(\sqrt{2}) &= -\sqrt{2}, \qquad & \sigma(\sqrt{3}) &= \sqrt{3}, \\ \tau(\sqrt{2}) &= \sqrt{2}, \qquad & \tau(\sqrt{3}) &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

したがって

$$\sigma(\alpha) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}, \qquad \tau(\alpha) = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

を得る． ここで，$\sigma \neq \tau$ はあきらかだが，

$$\sigma\tau(\alpha) = \sigma(\tau(\alpha)) = \sigma(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = -\sqrt{2} - \sqrt{3},$$
$$\tau\sigma(\alpha) = \tau(\sigma(\alpha)) = \tau(-\sqrt{2} + \sqrt{3}) = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

より，$\sigma\tau = \tau\sigma$ が成り立つ． したがって G はアーベル群である． また，$\sigma\tau$ は σ とも τ とも異なる G の元である． G の位数が体次数 $[L : \boldsymbol{Q}] = 4$ と一致することに注意すれば，

$$G = \{\, 1,\, \sigma,\, \tau,\, \sigma\tau \,\} = \langle \sigma,\, \tau \rangle$$

と表され，位数 4 のアーベル群であることがわかる． さらに G は位数 4 の元をもたないから巡回群ではない． 加法群 $\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ は位数 2 の巡回群（生成元は $\bar{1} = 1 + 2\boldsymbol{Z}$）であり，同型写像

$$\delta : G \longrightarrow \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$$

が

$$\delta(\sigma) = (\bar{1}, \bar{0}), \qquad \delta(\tau) = (\bar{0}, \bar{1})$$

によって与えられる．

例 12.3 （$\boldsymbol{Q}$ 上の 6 次非アーベル拡大） α を $X^3 - 5$ の実数根とし，ω を 1 の原始 3 乗根とする（$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ と思ってよい）． アイゼンシュタインの定理より，$X^3 - 5$ は $\boldsymbol{Q}$ 上既約，したがって α の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式である． さらに

$$X^3 - 5 = (X - \alpha)(X - \alpha\omega)(X - \alpha\omega^2)$$

だから，$\mathrm{Conj}(\alpha, \boldsymbol{Q}) = \{\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2\}$ であって，$X^3 - 5$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小分解体 L は

$$L = \boldsymbol{Q}\big(\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2\big) = \boldsymbol{Q}(\alpha, \omega)$$

で与えられる．$L/\boldsymbol{Q}$ のガロア群を $G = \mathrm{Gal}(L/\boldsymbol{Q})$ とおく． 中間体 $K = \boldsymbol{Q}(\alpha)$ および $F = \boldsymbol{Q}(\omega)$ について

$$[K : \boldsymbol{Q}] = 3, \qquad [F : \boldsymbol{Q}] = \big[\boldsymbol{Q}\big(\sqrt{-3}\big) : \boldsymbol{Q}\big] = 2$$

に注意する（後者は ω が $X^2 + X + 1$ の根，すなわち $(-1 \pm \sqrt{-3})/2$ であることからわかる）． このことから，$[L : \boldsymbol{Q}] = 6$，したがって G の位数は 6 であることもわかる． いま，$K = \boldsymbol{Q}(\alpha)$ に対応する G の部分群を H とし，$F = \boldsymbol{Q}(\omega)$ に対応する G の部分群を N とすると，

$$|H| = [L : K] = \frac{[L : \boldsymbol{Q}]}{[K : \boldsymbol{Q}]} = \frac{6}{3} = 2, \qquad |N| = [L : F] = \frac{[L : \boldsymbol{Q}]}{[F : \boldsymbol{Q}]} = \frac{6}{2} = 3,$$

したがって，H は位数 2 の巡回群，N は位数 3 の巡回群である． それぞれの生成元を τ, σ とする;

$$H = \langle \tau \rangle, \qquad N = \langle \sigma \rangle.$$

ここで，$\tau(\omega) = \omega^2$ である． 実際，そうでないとすると $\tau(\omega) = \omega$ だが，$\alpha \in K$ より $\tau(\alpha) = \alpha$ でもあるから，$L = \boldsymbol{Q}(\alpha, \omega)$ が H の不変体となって矛盾する． 一方，$\sigma(\alpha) = \alpha$ とすると，今度は L が N の不変体となって矛盾するから，$\sigma(\alpha) = \alpha\omega$ または $\alpha\omega^2$ である． 後者の場合，

$$\sigma^2(\alpha) = \sigma(\alpha\omega^2) = \sigma(\alpha)\sigma(\omega)^2 = \sigma\omega^2\omega^2 = \alpha\omega^4 = \alpha\omega$$

であって，かつ $N = \langle \sigma^2 \rangle$ でもあるから，σ^2 をあらためて σ とおくことによって

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= \alpha\omega, & \sigma(\omega) &= \omega, \\ \tau(\alpha) &= \alpha, & \tau(\omega) &= \omega^2 \end{aligned}$$

であるとしてよい． このとき，

$$\begin{aligned} \tau\sigma(\alpha) &= \tau(\alpha\omega) = \alpha\omega^2, & \sigma^2\tau(\alpha) &= \sigma^2(\alpha) = \alpha\omega^2, \\ \tau\sigma(\omega) &= \tau(\omega) = \omega^2, & \sigma^2\tau(\omega) &= \sigma^2(\omega^2) = \omega^2 \end{aligned}$$

より $\tau\sigma = \sigma^2\tau$ が示される． 次に，定理 11.1 より，

$\sigma K = \boldsymbol{Q}(\sigma(\alpha)) = \boldsymbol{Q}(\alpha\omega)$ に対応する部分群は $\sigma H\sigma^{-1} = \langle \sigma\tau\sigma^{-1} \rangle$,
$\sigma^2 K = \boldsymbol{Q}\big(\sigma^2(\alpha)\big) = \boldsymbol{Q}\big(\alpha\omega^2\big)$ に対応する部分群は $\sigma^2 H\sigma^{-2} = \langle \sigma^{-1}\tau\sigma \rangle$.

さらに，$\tau^2 = \sigma^3 = 1$ と $\tau\sigma = \sigma^2\tau$ を使えば，

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma^2\tau, \qquad \sigma^{-1}\tau\sigma = \sigma\tau$$

および

$$G = \langle \sigma, \tau \rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$$

が成り立つことがわかる． したがって，G は 3 次対称群 S_3 と同型な非アーベル群である． $F/\boldsymbol{Q}$ は 2 次ガロア拡大だから，$N = \langle \sigma \rangle$ は G の正規部分群である．実際，

$$\begin{aligned} \tau^{-1}\sigma\tau(\alpha) &= \tau\sigma(\alpha) = \tau(\alpha\omega) = \alpha\tau(\omega) = \alpha\omega^2 = \sigma^2(\alpha), \\ \tau^{-1}\sigma\tau(\omega) &= \tau\sigma(\omega^2) = \tau(\omega)^2 = \omega^4 = \omega = \sigma^2(\omega) \end{aligned}$$

より，$\tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^2 \in N$，よって $\tau^{-1}N\tau = N$ が成り立つ． 一方，$K/\boldsymbol{Q}$ はガロア拡大ではないから，H は G の正規でない部分群である．

§13. クンマー拡大

以下において扱う体はすべて $\boldsymbol{C}$ の部分体とする．また，自然数 n に対して，$\zeta_n \in \boldsymbol{C}$ を 1 の原始 n 乗根とする．すなわち，$\zeta_n \in \boldsymbol{C}^\times$ であって，その位数が n であるとする（$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ であるとしてよい）．

定理 13.1 n を自然数とし，K が 1 の原始 n 乗根 ζ_n を含むとする．$a \in K^\times$ に対して，$\alpha^n = a$ をみたす α を任意にひとつとり $L = K(\alpha)$ とおく．

(1) L は $X^n - a$ の K 上の最小分解体である．

(2) $X^n - a$ が K 上既約（すなわち α の K 上の最小多項式）ならば，L/K は n 次巡回拡大であり，$\sigma(\alpha) = \zeta_n\alpha$ をみたす K 上の自己同型 σ によって $\mathrm{Gal}(L/K)$ が生成される;

$$\mathrm{Gal}(L/K) = \langle\sigma\rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}\}.$$

(3) $\alpha^l \in K$ である最小の自然数 l が存在し，この l に対して $X^l - \alpha^l$ は K 上既約である．この場合，L/K は l 次巡回拡大である．

証明 (1) は例 9.11 ですでに示した．以下，$\zeta = \zeta_n$ と略記する．
(2) L/K がガロア拡大であることは (1) よりわかる．$G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とおく．$X^n - a$ が α の K 上の最小多項式だから，G の位数は $[L : K] = n$ である．さらに，$X^n - a$ の根 $\zeta^i\alpha$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ に対して，$\sigma_i(\alpha) = \zeta^i\alpha$ をみたす $\sigma_i \in G$ が存在し，これらによって G が尽くされる; $G = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}\}$．ここで，$\sigma = \sigma_1$ とおけば，

$$\sigma^2(\alpha) = \sigma(\zeta\alpha) = \zeta\sigma(\alpha) = \zeta \cdot \zeta\alpha = \zeta^2\alpha = \sigma_2(\alpha).$$

一般に $\sigma^i(\alpha) = \zeta^i\alpha = \sigma_i(\alpha)$ が順次確かめられ，とくに $\sigma^n(\alpha) = \alpha$ より $\sigma_n = \mathrm{id}_L (= 1)$. さらに $\sigma^i = \sigma_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ であることから，$G = \{1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}\}$，よって L/K は n 次巡回拡大である．
(3) $\alpha^n = a \in K$ であることより，最小の l が存在し，それが n の約数であることを示すのは難しくない．いま，$\xi = \zeta^{n/l}$ とおけば，ξ は 1 の原始 l 乗根であり，$X^l - \alpha^l$ のすべての根は $\xi^i\alpha$ $(i = 1, \ldots, l-1)$ である．よって，もし $X^l - \alpha^l$ が K 上可約ならば，その既約因子 $g(X) \in K[X]$ は，$1 \le d < l$ と $0 \le i_1 < \cdots < i_d \le l-1$ を用いて

$$g(X) = (X - \xi^{i_1}\alpha)\cdots(X - \xi^{i_d}\alpha)$$

と表され，とくに，その定数項は $g(0) = \pm\xi^{i_1+\cdots+i_d}\alpha^d \in K$ となる．一方，$\xi = \zeta^{n/l} \in K$ より $\alpha^d \in K$ でなければならないが，これは l の最小性に矛盾する． □

定義 13.2　前定理のようにして与えられる拡大 L/K を n に関する**巡回クンマー拡大**という．すなわち，体の拡大 L/K が n に関する巡回クンマー拡大であるとは，K が 1 の原始 n 乗根 ζ_n を含み，ある $a \in K^\times$ について $\alpha^n = a$ をみたす α によって $L = K(\alpha)$ と表されることである．巡回クンマー拡大は，しばしば $L = K(\sqrt[n]{a})$ とも表される．n に関する巡回クンマー拡大 $L_1/K, \ldots, L_r/K$ の合成 $L = L_1 \ldots L_r$ によって得られる拡大 L/K を，n に関する**クンマー拡大**という．

補題 13.3 (デデキント)　Γ を乗法群とし，$\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ を Γ から $\boldsymbol{C}^\times$ への相異なる準同型写像とする．このとき，$(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ をみたす任意の $c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{C}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \sigma_i(\gamma) = c_1\sigma_1(\gamma) + \cdots + c_n\sigma_n(\gamma) \neq 0$$

をみたす $\gamma \in \Gamma$ が存在する．

証明　対偶，すなわち，$c_1, \ldots, c_n \in \boldsymbol{C}$ とするとき，

$$\forall \gamma \in \Gamma \text{ に対して } \sum_{i=1}^{n} c_i \sigma_i(\gamma) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \cdots = c_n = 0$$

を n に関する数学的帰納法によって示す．$n = 1$ のときはあきらかである．そこで，$n > 1$ として，$n-1$ のときは成り立つと仮定し，任意の $\gamma \in \Gamma$ について

$$(\spadesuit) \qquad c_1\sigma_1(\gamma) + c_2\sigma_2(\gamma) + \cdots + c_n\sigma_n(\gamma) = 0$$

とする．いま，$\sigma_1 \neq \sigma_n$ だから，$\sigma_1(\beta) \neq \sigma_n(\beta)$ であるような $\beta \in \Gamma$ がとれる．等式 $(\spadesuit)$ の γ の代わりに $\beta\gamma$ を用いれば，

$$c_1\sigma_1(\beta)\sigma_1(\gamma) + c_2\sigma_2(\beta)\sigma_2(\gamma) + \cdots + c_n\sigma_n(\beta)\sigma_n(\gamma) = 0.$$

これと，$(\spadesuit)$ に $\sigma_n(\beta)$ をかけたもの

$$c_1\sigma_n(\beta)\sigma_1(\gamma) + c_2\sigma_n(\beta)\sigma_2(\gamma) + \cdots + c_n\sigma_n(\beta)\sigma_n(\gamma) = 0$$

の差を取れば，最後の項 $c_n\sigma_n(\beta)\sigma_n(\gamma)$ が消去されて，

$$c_1(\sigma_1(\beta) - \sigma_n(\beta))\sigma_1(\gamma) + \cdots + c_n(\sigma_{n-1}(\beta) - \sigma_n(\beta))\sigma_{n-1}(\gamma) = 0$$

が任意の $\gamma \in \Gamma$ について成り立つ．よって，帰納法の仮定と β の取り方から $c_1 = 0$ を得る．したがって $(\spadesuit)$ は

$$c_2\sigma_2(\gamma) + \cdots + c_n\sigma_n(\gamma) = 0$$

と書き換えられ，再び帰納法の仮定より $c_2 = \cdots = c_n = 0$ を得る．　□

定理 13.4　n を自然数とし，体 K は 1 の原始 n 乗根 ζ_n を含むとする． もし L/K が n 次巡回拡大ならば，ある $a \in K^\times$ が存在して，$L = K(\sqrt[n]{a})$ と表される． すなわち，$\zeta_n \in K$ ならば K 上の n 次巡回拡大は巡回クンマー拡大である．

証明　$\zeta = \zeta_n$ と略記する． σ を $\mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元とする;

$$\mathrm{Gal}(L/K) = \langle\sigma\rangle = \left\{1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}\right\}, \qquad \sigma^n = 1.$$

いま，$\Gamma = L^\times$, $\sigma_i = \sigma^{i-1}$ および $c_i = \zeta^{-(i-1)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ として前補題を適用すれば,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-i}\sigma^i(\gamma) = \gamma + \zeta^{-1}\sigma(\gamma) + \cdots + \zeta^{-(n-1)}\sigma^{n-1}(\gamma) \neq 0$$

をみたす $\gamma \in L$ が存在する． この和を α とすると，$0 \neq \alpha \in L$ であって

$$\sigma(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-i}\sigma^{i+1}(\gamma) = \zeta \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-(i+1)}\sigma^{i+1}(\gamma) = \zeta\alpha,$$

両辺を n 乗して $\sigma(\alpha^n) = \alpha^n$ を得る． σ は $\mathrm{Gal}(L/K)$ の生成元だから，α^n は $\mathrm{Gal}(L/K)$ の不変体 K に属する． すなわち $\alpha^n \in K$ であり，$X^n - \alpha^n \in K[X]$ となるから，$K(\alpha)/K$ は巡回クンマー拡大である． さらに，$\sigma(\alpha) = \zeta\alpha$, $\sigma^2(\alpha) = \sigma(\zeta\alpha) = \zeta\sigma(\alpha) = \zeta^2\alpha, \ldots$ より，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) = \left\{\alpha, \zeta\alpha, \zeta^2\alpha, \ldots, \zeta^{n-1}\alpha\right\}$ であるが，$\alpha \neq 0$ なので $|\mathrm{Conj}(\alpha, K)| = n$, したがって $X^n - \alpha^n$ が α の K 上の最小多項式でなければならず，$L = K(\alpha)$ を得る．□

定義 13.5　L/K を体の拡大とする．

(1) $X^n - a$ $(a \in K^\times)$ の形の K 上の既約多項式の根 α によって $L = K(\alpha)$ と表すことができるとき，L/K を 2 **項拡大**という．

(2) 体の列 $K_0, K_1, \cdots, K_r$ で,

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{r-1} \subset K_r = L$$
$$K_i/K_{i-1} \text{ は 2 項拡大 } (i = 1, 2, \cdots, r)$$

をみたすものが存在するとき，L/K を**ベキ根拡大**という．

定義 13.6　L/K を代数拡大とする． 中間体の列 $K_0, K_1, \cdots, K_r$ で,

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{r-1} \subset K_r = L$$
$$K_i/K_{i-1} \text{ はアーベル拡大 } (i = 1, 2, \cdots, r)$$

をみたすものがとれるとき，L/K を**塁アーベル拡大**という．

この節の残りと次の節で，**ベキ根拡大と有限次塁アーベル拡大との密接な関係**，すなわち，これらの拡大が “本質的” に同等であることを述べる（定理 13.8 および定理 14.2 を参照）．

注意　定理 13.1 において，$X^n - a$ が K 上既約ならば L/K はあきらかに 2 項拡大であるが，たとえ既約でなくても，(3) より，やはり 2 項拡大になる．すなわち，一般に巡回クンマー拡大は 2 項拡大，したがってクンマー拡大はベキ根拡大である．

補題 13.7　n を 1 より大きい自然数とする．体 K に対して $K(\zeta_n)/K$ は n より低い次数のアーベル拡大である．

証明　$\zeta = \zeta_n$ と略す．任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して $\sigma(\zeta)^n = \sigma(\zeta^n) = \sigma(1) = 1$ だから，$\sigma(\zeta) = \zeta^j$ をみたす j が存在する．$\sigma(\zeta) \in K(\zeta)$ だから $K(\zeta)/K$ はガロア拡大である．そのガロア群を G とおき，あらためて $\sigma \in G$ に対して $\sigma(\zeta) = \zeta^j$ をみたす j を j_σ とおく．ここで σ は同型写像だから，ζ^{j_σ} も 1 の原始 n 乗根であり，したがって $\gcd(j_\sigma, n) = 1$ が成り立つ．よって，$j_\sigma \in (\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})^\times$（法 n に関する既約剰余類群）であるとしてよく，写像

$$G \longrightarrow (\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})^\times, \qquad \sigma \mapsto j_\sigma$$

が定義できることがわかる．この写像が単射準同型であることを確かめるのは難しくない．よって，G は $(\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})^\times$ の部分群に同型，とくにアーベル群であり，

$$[K(\zeta) : K] = |G| \leq \left|(\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})^\times\right| = \varphi(n) < n.$$

ここで，φ はオイラー関数である．　□

定理 13.8　ベキ根拡大 L/K に対して，有限次塁アーベル拡大 L'/K で $L \subset L'$ をみたすものが存在する．

証明　L/K の中間体の列

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{r-1} \subset K_r = L$$
$$K_i/K_{i-1} \ \text{は 2 項拡大} \ \ (i = 1, 2, \cdots, r)$$

が存在する．ここで，$n_i = [K_i : K_{i-1}]$ とおけば，

$$K_i = K_{i-1}(\alpha_i), \qquad \alpha_i \text{ は } K_{i-1} \text{ 上の既約多項式 } X^{n_i} - a_i \text{ の根}$$

と表すことができる．そこで，n を $n_1, \ldots, n_r$ の公倍数とし，ζ を 1 の原始 n 乗根として，$M_i = K_i(\zeta)$ とおく $(i = 1, \ldots, r)$．このとき，M_{i-1} は 1 の原始 n_i 乗根を含むから，$M_i = M_{i-1}(\alpha_i)$ は M_{i-1} 上の巡回クンマー拡大，よってアーベル拡大である．一方，補題 13.7 より，$M_0 = K(\zeta)$ は K 上のアーベル拡大なので，$M_r = L(\zeta)$ は K 上有限次塁アーベル拡大である．　□

§14. 可解性

この節でも，前節同様，扱う体はすべて $\boldsymbol{C}$ の部分体とする．

補題 14.1 有限次アーベル拡大 L/K に対して，中間体の列 $K_1, \cdots, K_r$ で，

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{r-1} \subset K_r = L$$
$$K_i/K_{i-1} \text{ は巡回拡大 } (i = 1, 2, \cdots, r)$$

をみたすものが存在する．

証明 L/K の次数に関する数学的帰納法によって示す．$[L : K] = 1$ すなわち $L = K$ のときは自明だから，$[L : K] > 1$ として $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とおく．$1 \neq \sigma \in G$ をひとつとって $H = \langle \sigma \rangle$ とし，対応する L/K の中間体を M とすると，$\mathrm{Gal}(L/M) = H$ は巡回群だから L/M は巡回拡大である．一方，系 11.3 (2) より M/K はアーベル拡大である．しかも，$H \neq \{1\}$ より $[M : K] < [L : K]$ だから，帰納法の仮定より各拡大が巡回拡大である中間体の列 $K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_s = M$ がとれる．これと $M \subset L$ を合わせれば証明が完了する． □

定理 14.2 有限次冪アーベル拡大 L/K に対して，ベキ根拡大 L'/K で $L \subset L'$ をみたすものが存在する．

証明 L/K の次数に関する数学的帰納法による．$[L : K] = 1$ のときはあきらかだから，$n = [L : K] > 1$ とする．いま，L/K は冪アーベル拡大だから，前補題を何度か適用することにより，中間体の列 $K_1, \cdots, K_r$ で，

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{r-1} \subset K_r = L$$
$$K_i/K_{i-1} \text{ は巡回拡大 } (i = 1, 2, \cdots, r)$$

をみたすものが存在する．各 $i = 1, 2, \ldots, r$ について $n_i = [K_i : K_{i-1}]$ とすると，それらの最小公倍数 m は n の約数である．ζ を 1 の原始 m 乗根とすれば，補題 13.7 より，$K(\zeta)/K$ はアーベル拡大で次数は m 未満，したがって n 未満である．よって，帰納法の仮定が適用でき，ベキ根拡大 M/K で $K(\zeta) \subset M$ をみたすものがとれる．$M_i = K_i M$ とおけば，$M_i = K_i M_{i-1}$ だから，定理 11.6 より M_i/M_{i-1} はガロア拡大でそのガロア群 $\mathrm{Gal}(M_i/M_{i-1})$ は $\mathrm{Gal}(K_i/K_{i-1})$ の部分群と同型である．よって M_i/M_{i-1} は巡回拡大でその次数 m_i は n_i の約数であり m の約数でもある．$\zeta \in M \subset M_{i-1}$ に注意すれば，M_{i-1} は 1 の原始 m_i 乗根を含むことがわかり，定理 13.4 より，M_i/M_{i-1} は巡回クンマー拡大，よって 2 項拡大となる．このことから M_r/M_0 すなわち LM/M はベキ根拡大であることが導かれ，M/K がベキ根拡大であることと合わせて定理が証明された． □

定義 14.3　α を K 上代数的な元とする．$\alpha \in L$ をみたすベキ根拡大 L/K が存在するとき，α は K 上**ベキ根によって表される**という．

定義 14.4　$f(X) \in K[X]$ とする．$f(X)$ の任意の根が K 上ベキ根によって表されるとき，$f(X)$ は K 上**ベキ根によって解ける**，または K 上**ベキ根によって可解である**という．

例 14.5　体 K 上のすべての 2 次多項式は K 上ベキ根によって解ける．なぜなら，すべての 2 次式 $f(X) = X^2 + bX + c$ は

$$f(X) = \left(X + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4} - c\right)$$

と変形できるからである．

例 14.6　体 K に対して，1 のベキ根は K 上ベキ根によって表される．この事実は当たり前のように思えるが，$n > 1$ のとき 2 項式 $X^n - 1$ は K 上既約ではないので，定義から直接には導けない．証明は，補題 13.7 および定理 14.2 を用いて与えられる (定理 14.9)．なお，$n = 3, 5$ の場合は以下の例を参照せよ．

例 14.7　1 の原始 3 乗根 $\omega = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$ について，$L = \boldsymbol{Q}(\omega)$ とおく．$\omega^3 = 1$ かつ $\omega \neq 1$ より $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ だから，

$$\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

よって，$L = \boldsymbol{Q}\left(\sqrt{-3}\right)$ であって $L/\boldsymbol{Q}$ は 2 項拡大，したがって，ω は $\boldsymbol{Q}$ 上ベキ根によって表される．

例 14.8　ζ を 1 の原始 5 乗根とすると，$\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$．これを ζ^2 で割って

$$\zeta^2 + \zeta + 1 + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} = 0.$$

そこで，$\eta = \zeta + \dfrac{1}{\zeta}$ とおけば，$\eta^2 = \zeta^2 + \dfrac{1}{\zeta^2} + 2$ だから

$$\eta^2 + \eta - 1 = 0, \qquad \therefore \eta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

とくに，$\boldsymbol{Q}(\eta)=\boldsymbol{Q}\big(\sqrt{5}\big)$ を得る． 一方，$\zeta^2-\eta\zeta+1=0$ より

$$\zeta=\frac{\eta\pm\sqrt{\eta^2-4}}{2}$$

であるから，2 項拡大の列

$$\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{5}\Big)\subset\boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{5},\sqrt{\eta^2-4}\Big)$$

が得られ，$\zeta\in\boldsymbol{Q}\Big(\sqrt{5},\sqrt{\eta^2-4}\Big)$． このことから，$\zeta$ は $\boldsymbol{Q}$ 上ベキ根によって表されることがわかる．

定理 14.9 (ガウス) n を自然数とし，ζ を 1 の原始 n 乗根とすると，任意の体 K に対して ζ は K 上ベキ根で表される．

証明 補題 13.7 から $K(\zeta)/K$ はアーベル拡大であり，定理 14.2 より，ベキ根拡大 L/K で $K(\zeta)\subset L$ をみたすものがとれる． よって ζ は K 上ベキ根で表される． □

いま，L/K を有限次ガロア拡大としそのガロア群を G とする． さらに L/K が塁アーベル拡大でもあるとすると，中間体の列

$$K=K_0\subset K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_{m-1}\subset K_m=L$$
$$K_i/K_{i-1}\ \text{はアーベル拡大}\ \ (i=1,2,\cdots,m)$$

に G の部分群の列

$$G=G_0\supset G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_{m-1}\supset G_m=\{1\}$$
$$G_i\ \text{は}\ G_{i-1}\ \text{の正規部分群で}\ G_{i-1}/G_i\ \text{はアーベル群}\ (i=1,2,\cdots,m)$$

が対応する． 群論で学んだように，このような部分群列が存在する群は**可解群**とよばれる． すなわち，塁アーベルであるガロア拡大とは可解拡大に他ならない．次の定理は，定理 14.2 を L/K がガロア拡大の場合に制限して述べたものに過ぎない．

定理 14.10 有限次可解拡大 L/K に対して，ベキ根拡大 L'/K で $L\subset L'$ をみたすものが存在する．

さて，群論によれば、可解群の直積は可解群，可解群の部分群も可解群，さらに可解群の正規部分群による剰余群も可解群である． これらの事実を体の拡大の言葉に置き換えることは，ガロア対応に関する §11 の諸定理を用いれば可能である．

以上の準備の下で，この講義の最終目標である次の定理を証明しよう．

定理 14.11 (ガロア) $f(X) \in K[X]$ の K 上の最小分解体を L とする．$f(X)$ が K 上ベキ根によって解けるための必要十分条件は L/K が可解拡大であることである．

証明 L/K が可解拡大ならば，定理 14.10 から，$f(X)$ が K 上ベキ根によって解けることが直ちにわかる．逆を示すために，$f(X)$ が K 上ベキ根によって解けるとする．すなわち $f(X)$ の任意の根 α に対して，ベキ根拡大 L_α/K が存在して $\alpha \in L_\alpha$ をみたすとする．定理 13.8 を用いれば，$L_\alpha \subset L'_\alpha$ をみたす有限次巡アーベル拡大 L'_α/K がとれる．さらに L''_α を L'_α の K 上の正規閉包とすると，L''_α/K は可解拡大である．なぜなら，定理 11.6 を繰り返し適用することで，有限次巡アーベル拡大の正規閉包がまた有限次巡アーベル拡大であることがわかるからである．そこで，$f(X)$ のすべての根 α にわたる合成体 $\tilde{L} = \prod L''_\alpha$ を考えると，定理 11.5 (2) より，$\tilde{L}/K$ は可解拡大であり，さらに $f(X)$ のすべての根は $\tilde{L}$ に属するから $L \subset \tilde{L}$ が成り立つ．最後に，L/K はガロア拡大だから $\mathrm{Gal}(\tilde{L}/L)$ は $\mathrm{Gal}(\tilde{L}/K)$ の正規部分群であり，したがって系 11.3 (3) より L/K が可解拡大であることがわかる． □

定理 14.12 $f(X)$ を $\boldsymbol{Q}$ 上の 5 次既約多項式とする．$f(X)$ の実根の個数がちょうど 3（したがって虚根がちょうど 2 個）ならば，$f(X)$ は $\boldsymbol{Q}$ 上ベキ根によって解けない．

証明 $f(X)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小分解体を L とし，$L/\boldsymbol{Q}$ のガロア群を G とする．G は $f(X)$ の 5 つの根の置換群と考えられるので，5 次対称群 S_5 の部分群とみなすことができる．ここで，$f(X)$ のひとつの根 α に対して $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ は $L/\boldsymbol{Q}$ の中間体だから，G の位数は $[\boldsymbol{Q}(\alpha) : \boldsymbol{Q}] = 5$ で割り切れる．したがって G は位数 5 の元をもつ（シローの定理）．このことから，置換群としての G は長さ 5 の巡回置換をもつことが示せる．一方，複素共役を対応させる写像 $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C},\ z \mapsto \bar{z}$ を L に制限したものを $\tau \in G$ とおけば，L がちょうど 2 個の虚根をもつことから，τ は互換とみなすことができる．互換および長さ 5 の巡回置換をもつ S_5 の部分群は S_5 と一致することは，群論の一般論から証明できる．したがって $G = S_5$ であるが，S_5 は可解群ではないので $L/\boldsymbol{Q}$ は可解拡大ではない．よって，定理 14.11 より $f(X)$ は $\boldsymbol{Q}$ 上ベキ根によって解けない． □

系 14.13 (アーベル) $\boldsymbol{Q}$ 上の 5 次方程式には，四則とベキ根によって表される「解の公式」は存在しない．

証明 もし存在すれば，有理数係数のどんな 5 次方程式の解も $\boldsymbol{Q}$ 上ベキ根で表されることになる．しかし，たとえば $f(X) = X^5 - 5X + 1$ は前定理の条件をみたし，したがってベキ根によって解けないから矛盾する． □

§15. 補遺

次の命題は，補題 8.5 の証明の最初の部分で使われている．

命題 体 K の乗法群 $K^\times$ の有限部分群は巡回群である．

証明 A を $K^\times$ の有限部分群とし，A に属する位数最大の元 a をひとつとる． a で生成される巡回群 $\langle a\rangle$ が A に一致することを確かめればよい． そこで，$\langle a\rangle$ に属さない $b\in A$ が存在するとして矛盾を導く． a, b の位数をそれぞれ m, n とする． いま，素数 p について

$$m = p^e m', \quad n = p^f n', \quad \text{ただし，} p \text{ は } m'n' \text{ を割り切らない}$$

とすると，$a^{p^e}, b^{n'}$ の位数はそれぞれ m', p^f でこれらは互いに素だから，積 $a^{p^e}b^{n'}$ の位数は $p^f m'$ である． よって，m の最大性より

$$p^f m' \le m = p^e m', \qquad \therefore\ f \le e$$

となる． これが任意の素数 p について成り立つから，n は m の約数であることがわかる． そこで，$c = a^{m/n}$ とおくと c の位数は n である． いま，ある $j \in \boldsymbol{Z}$ について $c = b^j$ だとすると，j, n は互いに素となり（だって b, c はどっちも位数 n だもん），したがって $b \in \langle c\rangle \subset \langle a\rangle$ となって b のとり方に矛盾する． とくに，c は $1, b, b^2, \ldots, b^{n-1}$ のどれとも異なる． さらに，これら $n+1$ 個の元

$$c,\ 1,\ b,\ b^2, \ldots,\ b^{n-1} \in A \subset K^\times$$

はすべて多項式 $X^n - 1$ の根となるが，n 次式は K において n 個より多くの根をもたないから矛盾である． □

次に，やり残してあった補題の証明を与える．

補題 8.9 体 K 上代数的である α, β が，$\beta \in K(\alpha)$ をみたすならば，

$$|\mathrm{Conj}(\alpha, K)| = |\mathrm{Conj}(\alpha, K(\beta))|\,|\mathrm{Conj}(\beta, K)|$$

が成り立つ．

証明 定理 6.12 より，$\delta \in \mathrm{Conj}(\beta, K)$ に対して，$\sigma(\beta) = \delta$ をみたす $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が存在する． このような σ を各 δ に対して 1 つずつ選んで固定し σ_δ と表す;

$$\sigma_\delta(\beta) = \delta \in \mathrm{Conj}(\beta, K) \qquad (\sigma_\delta \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)).$$

補題を示すためには，ふたつの写像

$$F : \mathrm{Conj}(\alpha, K(\beta)) \times \mathrm{Conj}(\beta, K) \longrightarrow \mathrm{Conj}(\alpha, K)$$
$$G : \mathrm{Conj}(\alpha, K) \longrightarrow \mathrm{Conj}(\alpha, K(\beta)) \times \mathrm{Conj}(\beta, K)$$

を定義し，それらが互いに逆写像であること，すなわち $F \circ G$ と $G \circ F$ がそれぞれ恒等写像であることを確かめればよい．

(1) F の定義: $\delta \in \mathrm{Conj}(\beta, K)$ に対して，$\sigma_\delta \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が上のようにして定まり，$\gamma \in \mathrm{Conj}(\alpha, K(\beta))$ ならば，$\sigma_\delta(\gamma) \in \mathrm{Conj}(\gamma, K) = \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ であるから，

$$F : \mathrm{Conj}(\alpha, K(\beta)) \times \mathrm{Conj}(\beta, K) \longrightarrow \mathrm{Conj}(\alpha, K), \quad (\gamma, \delta) \mapsto \sigma_\delta(\gamma)$$

が定義できる．

(2) G の定義: $\varepsilon \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ に対して定理 6.12 を適用すれば，$\tau(\alpha) = \varepsilon$ をみたす $\tau \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が存在する． このとき $\tau(\beta)$ の値は τ の選び方によらず ε のみから定まる（実際，$\tau' \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ も $\tau'(\alpha) = \varepsilon$ をみたすならば，$\left(\tau^{-1} \circ \tau'\right)(\alpha) = \alpha$ だから，$\tau^{-1} \circ \tau'$ は $K(\alpha)$ 上で恒等写像であり，さらに $\beta \in K(\alpha)$ だから，$\left(\tau^{-1} \circ \tau'\right)(\beta) = \beta$ すなわち $\tau'(\beta) = \tau(\beta)$ を得る)． また，$\tau(\beta) \in \mathrm{Conj}(\beta, K)$ に注意すれば，$\sigma_{\tau(\beta)} \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が ε のみから定まることもわかる． ここで，σ_δ の定義から $\sigma_{\tau(\beta)}(\beta) = \tau(\beta)$，すなわち $\sigma_{\tau(\beta)}^{-1}(\tau(\beta)) = \beta$ だから，$\sigma_{\tau(\beta)}^{-1} \circ \tau \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K(\beta))$． よって定理 6.12 から

$$\sigma_{\tau(\beta)}^{-1}(\varepsilon) = \left(\sigma_{\tau(\beta)}^{-1} \circ \tau\right)(\alpha) \in \mathrm{Conj}(\alpha, K(\beta))$$

であり

$$G : \mathrm{Conj}(\alpha, K) \longrightarrow \mathrm{Conj}(\alpha, K(\beta)) \times \mathrm{Conj}(\beta, K), \quad \varepsilon \mapsto \left(\sigma_{\tau(\beta)}^{-1}(\varepsilon), \tau(\beta)\right)$$

が定義される．

(3) $F \circ G$ が恒等写像であることの証明: $\varepsilon \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ に対して，$\tau(\alpha) = \varepsilon$ をみたす $\tau \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ をとると

$$F(G(\varepsilon)) = F\left(\sigma_{\tau(\beta)}^{-1}(\varepsilon), \tau(\beta)\right) = \sigma_{\tau(\beta)}\left(\sigma_{\tau(\beta)}^{-1}(\varepsilon)\right) = \varepsilon$$

よって $F \circ G$ は $\mathrm{Conj}(\alpha, K)$ 上の恒等写像である．

(4) $G \circ F$ が恒等写像であることの証明: $(\gamma, \delta) \in \mathrm{Conj}(\alpha, K(\beta)) \times \mathrm{Conj}(\beta, K)$ に対して，$F(\gamma, \delta) = \sigma_\delta(\gamma)$ である． いま γ に対して，$\rho(\alpha) = \gamma$ をみたす $\rho \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K(\beta))$ が存在する． この ρ を用いると，$\sigma_\delta(\rho(\alpha)) = \sigma_\delta(\gamma)$ より，$\tau(\alpha) = \sigma_\delta(\gamma)$ をみたす $\tau \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ として $\tau = \sigma_\delta \circ \rho$ をとることができる． さらに $\rho(\beta) = \beta$ なので，$\tau(\beta) = \sigma_\delta(\rho(\beta)) = \sigma_\delta(\beta) = \delta$ となるから

$$G(F(\gamma, \delta)) = G(\sigma_\delta(\gamma)) = \left(\sigma_{\tau(\beta)}^{-1}(\sigma_\delta(\gamma)), \tau(\beta)\right) = \left(\sigma_\delta^{-1}(\sigma_\delta(\gamma)), \delta\right) = (\gamma, \delta)$$

よって $G \circ F$ は $\mathrm{Conj}(\alpha, K(\beta)) \times \mathrm{Conj}(\beta, K)$ 上の恒等写像である． □