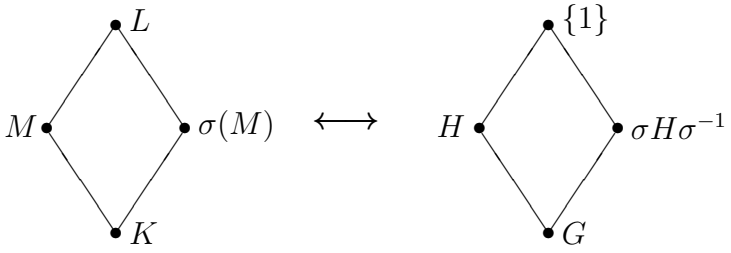
§11. ガロア対応

定理 11.1 L/K を有限次ガロア拡大とし，そのガロア群を G とする． M を L/K の中間体，H を M に対応する G の部分群とする． また，$\sigma \in G$ とする．このとき，$\sigma(M)$ は L/K の中間体であり，対応する G の部分群は $\sigma H \sigma^{-1}$ である．



証明 L/K は正規なので $\sigma(M) \subset \sigma(L) = L$，よって $\sigma(M)$ は L/K の中間体である．また，M と H が対応しているから $M = L^H$，すなわち $\alpha \in L$ に対して

$$\alpha \in M \iff \tau(\alpha) = \alpha \quad (\forall \tau \in H).$$

したがって，

$$\begin{aligned} \beta \in \sigma(M) \iff \sigma^{-1}(\beta) \in M &\iff \tau(\sigma^{-1}(\beta)) = \sigma^{-1}(\beta) \quad (\forall \tau \in H) \\ &\iff \sigma(\tau(\sigma^{-1}(\beta))) = \beta \quad (\forall \tau \in H) \\ &\iff (\sigma\tau\sigma^{-1})(\beta) = \beta \quad (\forall \tau \in H) \end{aligned}$$

そこで $\rho = \sigma\tau\sigma^{-1}$ と変数変換すれば，$\tau \in H \Leftrightarrow \rho \in \sigma H \sigma^{-1}$ となっているから

$$\beta \in \sigma(M) \iff \rho(\beta) = \beta \quad (\forall \rho \in \sigma H \sigma^{-1}),$$

このことは，中間体 $\sigma(M)$ が部分群 $\sigma H \sigma^{-1}$ に対応することを示している． □

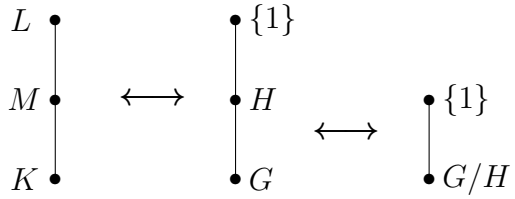
定理 11.2 L/K を有限次ガロア拡大とし，そのガロア群を G とする． M を L/K の中間体，H を M に対応する G の部分群とする． このとき，M/K がガロア拡大であるためには，H が G の正規部分群であることが必要十分である． またこのとき M/K のガロア群は G/H で与えられる． 詳しくは，制限写像

$$G = \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(M/K), \quad \sigma \mapsto \sigma|_M$$

から自然に同型

$$G/H = \mathrm{Gal}(L/K)/\mathrm{Gal}(L/M) \cong \mathrm{Gal}(M/K)$$

が引き起こされる．



証明　L/K がガロア拡大なので，とくに M/K は分離的である．したがって，M/K がガロアであるためには，正規であること，すなわち，任意の $\sigma \in G$ に対して $\sigma(M) = M$ が成り立つことが必要十分である．前定理を用いれば，

$$\sigma(M) = M \iff \sigma H \sigma^{-1} = H$$

であるが，右の等式が任意の $\sigma \in G$ に対して成り立つことは，H が G の正規部分群であることを示している．後半は，準同型定理から導かれる．　□

系 11.3　L/K を有限次ガロア拡大，M をその任意の中間体とする．

(1) L/K が巡回拡大ならば，$L/M,\ M/K$ はともに巡回拡大である．
(2) L/K がアーベル拡大ならば，$L/M,\ M/K$ はともにアーベル拡大である．
(3) L/K が可解拡大ならば，L/M も可解拡大である．さらに M/K がガロア拡大（すなわち $\mathrm{Gal}(L/M)$ が $\mathrm{Gal}(L/K)$ の正規部分群）ならば，M/K も可解拡大である．

証明　H を群 G の部分群とする．G がアーベル群ならば，H はアーベル群かつ G の正規部分群であって，剰余群 G/H もアーベル群である．このことと定理 11.2 から (2) が得られる．また，アーベル群を巡回群としても同様のことがいえるから (1) も成り立つ．(3) は，G が可解群のとき H も可解群であり，さらに H が G の正規部分群ならば剰余群 G/H も可解群になることから導かれる．　□

定理 11.4　L/K を有限次ガロア拡大とし，そのガロア群を G とする．いま，L/K の中間体 M_1, M_2 がそれぞれ G の部分群 H_1, H_2 に対応しているとする．

(1) $M_1 \subset M_2$ と $H_1 \supset H_2$ は同値である．
(2) 合成体 M_1M_2 に対応する部分群は $H_1 \cap H_2$ である．
(3) $M_1 \cap M_2$ に対応する部分群は $H_1 \cup H_2$ で生成される G の部分群である．

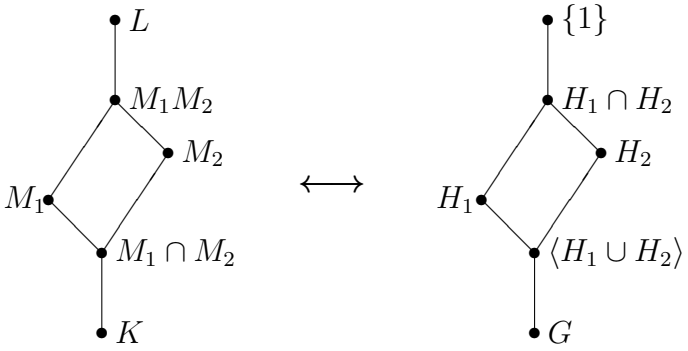
証明　(1)　まず $M_1 \subset M_2$ を仮定する．$\sigma \in H_2 = \mathrm{Gal}(L/M_2)$ を任意にとると，

$$\sigma(x) = x \quad (\forall x \in M_2) \quad \text{より} \quad \sigma(x) = x \quad (\forall x \in M_1), \quad \therefore \sigma \in \mathrm{Gal}(L/M_1) = H_1$$

よって $H_2 \subset H_1$ を得る．逆に $H_2 \subset H_1$ を仮定する．$x \in M_1 = L^{H_1}$ を任意にとると，

$$\sigma(x) = x \quad (\forall \sigma \in H_1) \quad \text{より} \quad \sigma(x) = x \ (\forall \sigma \in H_2), \quad \therefore x \in L^{H_2} = M_2$$

よって $M_1 \subset M_2$ を得る．
(2) M_1M_2 は M_1, M_2 を含む最小の体だから，(1) より，対応する部分群は H_1, H_2 に含まれる最大の部分群 $H_1 \cap H_2$ である．
(3) $M_1 \cap M_2$ は M_1, M_2 に含まれる最大の体だから，(1) より，対応する部分群は H_1, H_2 を含む最小の群であり，それは $H_1 \cup H_2$ で生成される G の部分群である．



□

定理 11.5　M_1, M_2 がともに K 上の有限次ガロア拡大体であるとする．

(1) M_1M_2 および $M_1 \cap M_2$ はともに K 上ガロアである．
(2) $\mathrm{Gal}(M_1M_2/K)$ は直積 $\mathrm{Gal}(M_1/K) \times \mathrm{Gal}(M_2/K)$ の部分群に同型である．
(3) $M_1 \cap M_2 = K$ ならば，自然な同型

$$\mathrm{Gal}(M_1M_2/K) \cong \mathrm{Gal}(M_1/K) \times \mathrm{Gal}(M_2/K)$$

が存在する．

証明　(1) は，定理 8.13 から分離性が，定理 9.13 から正規性が導かれることからわかる．
(2) と (3) を示すために，準同型写像

$$\Gamma : \mathrm{Gal}(M_1M_2/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(M_1/K) \times \mathrm{Gal}(M_2/K), \quad \sigma \mapsto (\sigma|_{M_1}, \sigma|_{M_2})$$

を考える．いま，$\sigma \in \mathrm{Ker}\,\Gamma$ ならば，$\sigma|_{M_1} = \mathrm{id}_{M_1}$，$\sigma|_{M_1} = \mathrm{id}_{M_1}$ だから，$\sigma|_{M_1M_2} = \mathrm{id}_{M_1M_2}$，したがって $\mathrm{Ker}\,\Gamma = \{\mathrm{id}_{M_1M_2}\} = \{1\}$，すなわち Γ は単射であり (2) が得られた．次に，$G = \mathrm{Gal}(M_1M_2/K)$ とおき，M_1, M_2 に対応する G の部分群を H_1, H_2 とする．M_1, M_2 は K 上ガロアだから，定理 11.2 より，H_1, H_2 は G の正規部分群であり，

$$\mathrm{Gal}(M_1/K) \cong G/H_1, \qquad \mathrm{Gal}(M_2/K) \cong G/H_2,$$

したがって，上で定義した単射準同型写像 Γ は

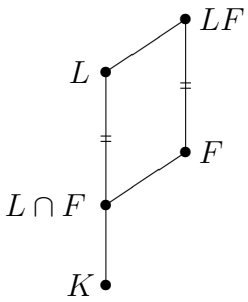
$$\Gamma : G \longrightarrow G/H_1 \times G/H_2$$

と書き換えることができる． 一方，H_1, H_2 の正規性から，$H_1 \cup H_2$ で生成される群は

$$H_1H_2 = \{\, h_1h_2 \,|\, h_1 \in H_1,\, h_2 \in H_2 \,\}$$

と表すことができる． ここで，定理 11.4 (2) より，$H_1 \cap H_2$ は M_1M_2 に対応するから単位群，すなわち $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ である． よって，H_1H_2 は直積群 $H_1 \times H_2$ と同型であり，さらに $M_1 \cap M_2$ に対応していることが定理 11.4 (3) からわかる． そこで，とくに $M_1 \cap M_2 = K$ の場合を考えると，$G = H_1H_2 \cong H_1 \times H_2$ であって，G の位数と $G/H_1 \times G/H_2$ の位数は等しくなる． したがって，Γ は同型写像になり (3) が確かめられた． □

定理 11.6　L/K が有限次ガロア拡大ならば，K 上の任意の拡大体 F に対して，LF/F はガロア拡大であり，ガロア群は $\mathrm{Gal}(L/(L\cap F))$ と自然に同型となる． とくに $\mathrm{Gal}(LF/F)$ は $\mathrm{Gal}(L/K)$ の部分群と同型である．



証明　L/K は有限次分離拡大だから，原始元定理（定理 8.7）より，$L = K(\alpha)$ とかける． このとき，α は K 上分離的だから F 上ももちろん分離的であり，さらに $LF = F(\alpha)$ だから，命題 8.10 より LF は F 上分離的である． 一方，定理 9.14 より LF は F 上正規でもあるから，LF/F はガロア拡大である． 次に，準同型写像

$$\Delta : \mathrm{Gal}(LF/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K), \quad \sigma \mapsto \sigma|_L$$

を考える． いま，$\sigma \in \mathrm{Ker}\,\Delta$ とすると $\sigma|_L = \mathrm{id}_L$ だが，もともと σ は F 上の写像なので $\sigma|_F = \mathrm{id}_F$，したがって $\sigma = \mathrm{id}_{LF}$ であり，$\mathrm{Ker}\,\Delta = \{\mathrm{id}_{LF}\} = \{1\}$ を得る． よって Δ は単射である． そこで，

$$\mathrm{Im}\,\Delta = \mathrm{Gal}(L/L\cap F)$$

を示せば証明は完了する． そのためには，ガロア拡大 L/K において，$\mathrm{Im}\,\Delta$ に対応する中間体 $L^{\mathrm{Im}\,\Delta}$ が $L \cap F$ に一致することを確かめればよい． まず，F の元は $\mathrm{Gal}(LF/F)$ で不変だから，$L \cap F$ の元は $\mathrm{Im}\,\Delta$ で不変，すなわち $L \cap F \subset L^{\mathrm{Im}\,\Delta}$ が成り立つ． 一方，

$$L^{\mathrm{Im}\,\Delta} \subset (LF)^{\mathrm{Gal}(LF/F)} = F$$

に注意すれば，$L^{\mathrm{Im}\,\Delta} \subset L \cap F$ が得られるから，$L^{\mathrm{Im}\,\Delta} = L \cap F$ が確かめられた． □