代数II　中間試験問題 Nov. 22, 2013　(中野 伸)

[1]　$n = 1286936$ の素因数分解は $n = 2^3 \cdot 7^4 \cdot 67$ である．以下の等式をみたす最小の自然数 m をそれぞれ求めよ．

(1)　$\boldsymbol{Q}(\sqrt{n}) = \boldsymbol{Q}(\sqrt{m})$　　(2)　$\boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{n}) = \boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{m})$

[2]　L/K が素数次拡大ならば，$\alpha \notin K$ である任意の $\alpha \in L$ に対して $K(\alpha) = L$ であることを証明せよ．

[3]　$3 + \sqrt[5]{3}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．

[4]　$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ について以下の問に答えよ．

(1)　$\sqrt{2}$ を α の有理式で表せ．

(2)　$\boldsymbol{Q}(\alpha) = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ を示せ．

(3)　$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．

(4)　$[\boldsymbol{Q}(\alpha) : \boldsymbol{Q}]$ を求めよ．

[5]　x が $x^3 - x - 1 = 0$ をみたすとき，$\dfrac{5}{1 + x^2} = a + bx + cx^2$ となる $a, b, c \in \boldsymbol{Q}$ を求めよ．