

代数II 中間試験問題 Nov. 20, 2014 (中野 伸)

- [1] 任意の正の整数 a に対して, $Q(\sqrt[3]{a^2}) = Q(\sqrt[3]{a})$ が成り立つことを示せ.
- [2] 以下の問いに答えよ.
- (1) $Q(\sqrt[6]{27})/Q$ の次数を求めよ.
 - (2) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ の Q 上の最小多項式を求めよ (ヒント: 4次式ではない).
 - (3) $\sqrt[4]{3}$ の Q 上の共役元をすべて求めよ.
- [3] $\alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{-1}}{2}$ について以下の問いに答えよ.
- (1) $\sqrt{-1} \in Q(\alpha)$ を示せ.
 - (2) $\sqrt{2} \notin Q(\sqrt{-1})$ を示せ.
 - (3) $[Q(\alpha) : Q]$ を求めよ.
 - (4) α の Q 上の最小多項式を求めよ.
 - (5) $Q(\alpha)$ は, 前問で求めた多項式の Q 上の最小分解体であることを示せ.
- [4] E/F を体拡大, $\alpha \in E$ とするとき, 以下の命題を証明せよ.
- (1) $[F(\alpha) : F(\alpha^2)] \leq 2$ が成り立つ.
 - (2) $\alpha \in F(\alpha^2)$ ならば, α は F 上代数的である.
 - (3) $[E : F]$ が奇数ならば, $\alpha \in F(\alpha^2)$ である.