代数 II　中間試験問題 Nov. 17, 2015　(中野 伸)

[1]　$\alpha = 1 + \sqrt{2}$, $\beta = 3 - \sqrt{2}$ とする．

(1)　α, β は $\boldsymbol{Q}$ 上 1 次独立であることを示せ．

(2)　$\boldsymbol{Q}(\alpha, \beta) = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ が成り立つことを示せ．

[2]　$\alpha = \sqrt{4 + \sqrt{6}}$ とする．

(1)　α の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．

(2)　α の $\boldsymbol{Q}$ 上の共役元をすべて求めよ．

(3)　α の $\boldsymbol{Q}(\sqrt{6})$ 上の共役元をすべて求めよ．

[3]　$K_1 = \boldsymbol{Q}(\sqrt[12]{5})$, $K_2 = \boldsymbol{Q}(\sqrt[3]{25})$ とする．

(1)　K_1 と K_2 には包含関係がある． どちらが拡大体かを判定せよ．

(2)　$[K_1 : \boldsymbol{Q}]$ を求めよ．

(3)　K_1, K_2 のうち，拡大体を L，部分体を K とするとき，$[L : K]$ を求めよ．

[4]　$f(X)$ を体 K 上の 3 次既約多項式，$g(X)$ を K 上の 2 次既約多項式とし，さらに $f(g(\alpha)) = 0$ とする．

(1)　$[K(g(\alpha)) : K]$ を求めよ．

(2)　$[K(\alpha) : K]$ は，3 または 6 であることを示せ．

[5]　L/K を体の拡大とする． 次の各命題について，正しければ証明を与え，正しくなければ反例をあげよ．

(1)　L/K が無限次拡大ならば，K 上代数的でない $\alpha \in L$ が存在する．

(2)　$\beta^2 + 1$ が K 上代数的であるような $\beta \in L$ は K 上代数的である．