代数II　試験問題 Jan. 26, 2016 (中野 伸)

[1]　$\sqrt{-2}+\sqrt{-3}+\sqrt{6}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式を求めよ．ただし，$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=-\sqrt{6}$ が成り立つとする．

[2]　$\alpha=\sqrt[3]{2}$ とする．

(1)　$\boldsymbol{Q}(\alpha)=\boldsymbol{Q}(\alpha^2)$ が成り立つことを示せ．

(2)　$\boldsymbol{Q}(\alpha)/\boldsymbol{Q}$ がガロア拡大かそうでないか判定せよ．

[3]　xy 平面において，$(1,-1)$ を中心とする半径 2 の円を C とする．

(1)　直線 $y=3x-1$ と C との交点を (a_1,b_1), (a_2,b_2) とするとき，体 $\boldsymbol{Q}(a_1,a_2,b_1,b_2)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の拡大次数を求めよ．

(2)　$(0,1)$ を中心とする半径 1 の円と C との交点を (c_1,d_1), (c_2,d_2) とするとき，体 $\boldsymbol{Q}(c_1,c_2,d_1,d_2)$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の拡大次数を求めよ．

[4]　枠内の文章は，$\cos\frac{2\pi}{7}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式を求める方法を述べたものである． これを読んで，問に答えよ．

> $z=e^{\frac{2\pi i}{7}}$ とおくと，$z^7=1$ であって $z\neq 1$ が成り立つ． いま，$f(X)=X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ とおくと，$\underline{f(z)=0 \text{ が成り立ち}}_{\text{(A)}}$，さらに $\underline{f(X) \text{ は } \boldsymbol{Q} \text{ 上既約}}_{\text{(B)}}$ だから，$f(X)$ は z の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式である． とくに，$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ の両辺を z^3 で割れば
>
> $$(\sharp)\qquad z^3+z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}=0.$$
>
> そこで，$\beta=z+z^{-1}$ とおくとき，β^2, β^3 を計算することにより，
>
> $$z^2+z^{-2}=\boxed{\text{(L)}},\qquad z^3+z^{-3}=\boxed{\text{(M)}}$$
>
> が得られ，$(\sharp)$ と比べれば，β の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式が $g(X)=\boxed{\text{(P)}}$ であることがわかる．一方で，$\underline{\beta=2\cos\frac{2\pi}{7} \text{ が成り立つ}}_{\text{(C)}}$ から，$\cos\frac{2\pi}{7}$ の $\boldsymbol{Q}$ 上の最小多項式は $h(X)=\boxed{\text{(Q)}}$ である．

(1)　下線部 (A), (B), (C) をそれぞれ証明せよ．

(2)　β によって表される式 (L), (M) を求めよ．

(3)　多項式 (P), (Q) を求めよ．

(4)　正 7 角形が作図不可能であることを説明せよ．