代数 II　試験問題 Jan. 30, 2019　(中野 伸)

注意: 証明問題以外でも，答えだけでなく，答えに至る考え方等を書くこと．

[1]　以下のそれぞれの多項式について対称式かどうか判定せよ． 対称式の場合は基本対称式（『 $\cdots$ 』内で定義された $s, t, \ldots$）の多項式として表し，そうでない場合はその理由を書け．

(1)　$f(x, y) = (x - y^2)(y - x^2)$
『 $s = x + y,\ t = xy$ 』

(2)　$g(x, y, z) = xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)$
『 $s = x + y + z,\ t = xy + yz + zx,\ u = xyz$ 』

[2]　以下の問いに答えよ．

(1)　複素数 α が $\mathbb{Q}$ 上超越的ならば，$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^3)] = 3$ であることを示せ．

(2)　$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^3)] = 2$ をみたす複素数 α をひとつ求めよ．

[3]　以下の命題を証明せよ．

(1)　体 K の拡大体の元 α について，$\dfrac{1}{\alpha^3 + 1} \in K[\alpha]$ ならば α は K 上代数的である．

(2)　体 K 上代数的な α, β について，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) \subset \mathrm{Conj}(\beta, K)$ ならば $\mathrm{Conj}(\alpha, K) = \mathrm{Conj}(\beta, K)$ である．

(3)　$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間として同型であり，かつ，体としては同型ではない．

(4)　$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$ は $X^4 + 1$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体である．

[4]　以下の問いに答えよ．

(1)　$k \equiv 7 \pmod 9$ をみたす自然数 k について，$\sqrt{\sqrt[3]{k} - 1}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ（求めた多項式が既約であることも示せ）．

(2)　$f(X) = X^5 + X^2 - X - 1$ とする． 無理数 α が $f(\alpha) = 0$ をみたすとき，$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ を求めよ（ヒント：$f(X)$ は因数分解できて……）．

(3)　$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ 上の共役元をすべて求めよ．

(4)　$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, \beta)$ が $\mathbb{Q}$ 上の正規拡大体となるような複素数 β をひとつ求めよ．