代数 II　試験問題 Jan. 22, 2020 (中野 伸)

注意: 証明問題以外でも，答えだけでなく，答えに至る考え方等を書くこと.

[1]　以下に与えられた，x, y, z に関する 3 変数対称式を，基本対称式

$$s = x + y + z, \qquad t = xy + yz + zx, \qquad u = xyz$$

の多項式として表せ.

(1)　$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

(2)　$g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$

[2]　以下の問いに答えよ.

(1)　$\mathbb{F}_5$ において $X^3 - X - 1$ を因数分解せよ.

(2)　$X^5 - X^4 - 4X + 4$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を求めよ.

[3]　複素数 α が $\alpha^3 = \alpha^2 + 1$ をみたすとき，以下の問いに答えよ.

(1)　$\alpha^6 = g(\alpha)$ をみたす多項式 $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ で次数が最低のものを求めよ.

(2)　α^2 の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.

(3)　$[\mathbb{Q}(\alpha^2) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

[4]　実数 $\beta = \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ と，体 $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ および $M = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ について，以下の問いに答えよ.

(1)　β の L 上の共役元をすべて求めよ.

(1)　β の M 上の共役元をすべて求めよ.

(2)　$\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大でないことを示せ.

[5]　K を体とし，その代数的閉包を $\overline{K}$ とする． 以下の命題を証明せよ.

(1)　0 でない $\gamma \in \overline{K}$ を任意にとる．K 上の多項式環から $\overline{K}$ への写像

$$\varphi : K[X] \longrightarrow \overline{K}, \qquad g(X) \mapsto g(\gamma)$$

を考えると，$\dfrac{1}{\gamma} \in \operatorname{Im} \varphi$ である.

(2)　$\delta \in \overline{K}$ の K 上の最小多項式が 2 次式ならば，$K(\delta)/K$ は正規拡大である.