代数 II　試験問題 Jan. 19, 2022　(中野 伸)

注意: 証明問題以外でも，答えだけでなく，答えに至る考え方等を書くこと.

[1]　L/K を体の拡大とする． 任意の $\alpha \in L$ （ただし $\alpha \neq 1$） に対して,

$$\alpha \in K\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)$$

を示せ.

[2]　$\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ について，以下の問に答えよ.

(1)　$\mathrm{Conj}(\alpha, \mathbb{Q}(\sqrt{6}))$ を求めよ.

(2)　α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.

(3)　$\sqrt{2}-\sqrt{3} \in \mathrm{Conj}(\alpha, \mathbb{Q})$ を示せ.

(4)　$\sqrt{2}-\sqrt{3} = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3$ をみたす $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ を求めよ.

[3]　複素数 α は $\mathbb{Q}$ 上代数的であり，さらに実数ではないとする． $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ がガロア拡大ならば，α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f(X)$ は実根をもたないことを示せ.

[4]　$\mathbb{Q}$ 上の多項式 $f(X) = X^3 + 3X^2 - 1$ の根 α をひとつとる． 以下の問に答えよ.

(1)　$f(X)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ.

(2)　$\beta = 2 - 3\alpha^2,\ \gamma = 1 + \alpha + \alpha^2$ に対して $\beta\gamma = a + b\alpha + c\alpha^2$ をみたす $a, b, c \in \mathbb{Q}$ を求めよ.

(3)　$-1 - \dfrac{1}{\alpha}$ も $f(X)$ の根であることを確かめ，$\mathrm{Conj}(\alpha, \mathbb{Q})$ を求めよ.

(4)　$\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であることを示せ.