第6章　合同式を解く

6.1　1次合同式

整数 a が m を法として可逆であることは,

$$ax \equiv 1 \pmod{m}$$

をみたす整数 x が存在することであった．また，a が零因子であることは,

$$ax \equiv 0, \quad x \not\equiv 0 \pmod{m}$$

をみたす整数 x が存在することであった．これらの性質は，与えられた合同式を未知数 x をもつ方程式のように扱い，その整数解の存在によって特徴づけられていると考えることができる．この章では，方程式としての合同式を扱い，その整数解について述べる．

まず最初に，すでに学んだ1次不定方程式の理論を書き換えることにより，次を得る．

定理 6.1 整数 $a_1, \ldots, a_n, b, m$ に対して合同式

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \equiv b \pmod{m}$$

が整数解 $x_1, \ldots, x_n$ をもつための必要十分条件は，b が $\gcd(a_1, \ldots, a_n, m)$ の倍数であることである．

証明　与えられた合同式が整数解 $x_1, \ldots, x_n$ をもつことと，1次不定方程式

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + my = b$$

が整数解 $x_1, \ldots, x_n, y$ をもつことは同値，よって，定理3.5より定理の主張を得る．　□

上記定理を $n = 1, b = 1$ として適用すれば,「合同式 $ax \equiv 1 \pmod{m}$ が整数解もつ」⇔「1 が $\gcd(a, m)$ を約数としてもつ」⇔「$\gcd(a, m) = 1$」，すなわち，定理5.9の一部が得られる．さらに，次の系が成り立つこともすぐにわかる．

系 6.2 整数 a, m が互いに素ならば，任意の整数 b に対して，合同式

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

は整数解をもつ．さらに，解は m を法として一意的に定まる．すなわち，$x, x' \in \boldsymbol{Z}$ がともに解ならば $x \equiv x' \pmod{m}$ が成り立つ．

系 6.2 は，以下に述べるように，連立合同式に拡張することができる． いま，整数 a_{ij} および b_i $(i,j=1,\dots,n)$ に対して，$x_1,\dots,x_n$ を未知数とする法 m に関する連立合同式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \equiv b_1 \pmod m \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \equiv b_2 \pmod m \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \equiv b_n \pmod m \end{cases}$$

を考える． これを，線形代数で学んだときのように，n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ と n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}=(b_i)$，および未知数からなる列ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_i)$ を用いて

$$A\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{b} \pmod m$$

と表すと便利である． 次の定理が系 6.2 の一般化になっている．

定理 6.3 A を整数を成分とする n 次正方行列，m を整数とする． $\det A$ と m が互いに素ならば，任意の整数成分 n 次元列ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対して，m を法とする連立合同式

$$A\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{b} \pmod m$$

は整数を成分とするベクトル解をもつ． さらに，解は m を法として一意的に定まる．

証明 A の余因子行列 $\tilde{A}$ は，整数を成分とする n 次正方行列であって

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = (\det A)E$$

が成り立つことに注意する． ここで E は n 次単位行列を表す． 仮定より，$\det A$ の法 m に関する逆元 c がとれて，$c\det A \equiv 1 \pmod m$ をみたすから，

$$A(c\tilde{A}\boldsymbol{b}) = c(A\tilde{A})\boldsymbol{b} = (c\det A)\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{b} \pmod m.$$

よって $\boldsymbol{x}=c\tilde{A}\boldsymbol{b}$ は解である． □

例 6.4 連立合同式 $\begin{cases} 24x-15y \equiv 20 \pmod{16} \\ 11x+71y \equiv 13 \pmod{16} \end{cases}$ を解け．

解 まず，係数行列式は，$\begin{vmatrix} 24 & -15 \\ 11 & 71 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 61 \equiv -3 \pmod{16}$ であり，-3 が法 16 と互いに素だから，定理 6.3 より，整数解 x,y をもつことが保証される． 次に，解を求めるために拡大係数行列を “16 を法として” 変形する;

$$\begin{pmatrix} 24 & -15 & 20 \\ 11 & 71 & 13 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & 7 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行入替}]{} \begin{pmatrix} -5 & 7 & -3 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{行}\times 3]{} \begin{pmatrix} 1 & 21 & -9 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2\text{行}+1\text{行}\times 8]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 41 & 60 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[2\text{行}\times(-7)]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow[1\text{行}+2\text{行}\times(-5)]{\text{ちょっと略した}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

この変形から，解 $(x,y)=(-5,-4)$ を得る． $(x,y)=(11,12)$ が解であるとしてもよい．

6.2　中国の剰余定理

前節では，共通の法をもついくつかの合同式からなる連立合同式を扱った． この節では異なる法をもつ連立合同式を考える．

定理 6.5 (中国の剰余定理) $m_1, m_2, \ldots, m_r$ をどの 2 つも互いに素な自然数とすると，任意の整数 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ に対して，連立合同式

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \qquad \cdots\cdots \\ x \equiv a_r \pmod{m_r} \end{cases}$$

は整数解 x をもつ． さらに，$M = m_1 \cdots m_r$ とすると，解は M を法として一意的である．

一意性は次のようにして確かめられる． $x, x' \in \boldsymbol{Z}$ がどちらも上の合同式をみたすならば，$x - x'$ は $m_1, m_2, \ldots, m_r$ すべての倍数である． 一方，仮定より $m_1, m_2, \ldots, m_r$ はどの 2 つも互いに素だから，これらの最小公倍数は $M = m_1 \cdots m_r$ であり，$x - x'$ はその倍数，したがって $x \equiv x' \pmod{M}$ が成り立ち，M を法とする一意性が確かめられた．

以下において，解が存在することの証明を 2 つ与える．

第 1 証明　$r = 1$ のときは明らかなので $r \geq 2$ としよう． まず，第 1 の合同式から解は $a_1 + m_1 y$ の形をしている． これが第 2 の式をみたしているので

$$a_1 + m_1 y \equiv a_2 \pmod{m_2} \quad \text{すなわち} \quad m_1 y \equiv a_2 - a_1 \pmod{m_2}.$$

右式を，y を未知数とする合同式と考えると，m_1, m_2 が互いに素であることから，系 6.2 より整数解が存在する． そのひとつを k とすれば $y \equiv k \pmod{m_2}$ であり，m_1 を掛けて

$$m_1 y \equiv m_1 k \pmod{m_1 m_2},$$

したがって，第 1，第 2 の合同式はひとつの合同式

$$x \equiv a_1 + m_1 k \pmod{m_1 m_2}$$

に置き換えることができ，$r = 2$ ならば右辺が解を与えることになる． $r \geq 3$ のときも，この操作を繰り返すことで最終的にひとつの合同式に帰着され，それが解を与える（正確には数学的帰納法による）． □

第 2 証明　まず，$n_1, \ldots, n_r \in \boldsymbol{Z}$ を次式で定める;

$$m_i n_i = m_1 \cdots m_r \quad (i = 1, \cdots r).$$

すなわち n_i は $m_1, \ldots, m_r$ から m_i を除いたものの積であり，仮定より m_i, n_i は互いに素である． よって，系 6.2 より，$n_i t_i \equiv a_i \pmod{m_i}$ をみたす整数 t_i がとれる． このとき，n_i の定義から，$1 \leq i, j \leq r$ に対して

$$n_i t_i \equiv \begin{cases} a_i & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \pmod{m_j}$$

であり，したがって $x = n_1 t_1 + \cdots + n_r t_r$ が解を与えることがわかる． □

上記２つの証明は，実際に解を求める計算法も与えている． 数学的帰納法による第１証明は，合同式を２つずつ順々に解いていく方法，第２証明はすべての合同式を平等に扱い，解を一気に構成する方法である．

以下ではひとつの例題に対し，第１および第２証明にそった解法をそれぞれ例示する．

例 6.6 次の連立合同式を解け．

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

解１ まず第１の合同式から，解は $2+3k$ の形をしている． これが第２の式をみたすから $2+3k \equiv 3 \pmod{5}$ を解いて $k \equiv 2 \pmod{5}$，さらに 3 を全体にかけて $3k \equiv 6 \pmod{15}$ となるから，第１，第２の合同式はひとつの合同式 $x = 2 + 3k \equiv 8 \pmod{15}$ に帰着する． 続けて，この式から解は $8 + 15l$ の形をしていて，それを第３の合同式に当てはめると，l は $8 + 15l \equiv 2 \pmod{7}$ をみたさなければならない． これを解いて $l \equiv 1 \pmod{7}$，よって $15l \equiv 15 \pmod{105}$． これから，解 $x = 8 + 15l \equiv 23 \pmod{105}$ を得る．

解２ 三つの合同式

$$35t_1 \equiv 2 \pmod{3}, \qquad 21t_2 \equiv 3 \pmod{5}, \qquad 15t_3 \equiv 2 \pmod{7}$$

をそれぞれ解くことで，たとえば $(t_1, t_2, t_3) = (4, 3, 2)$ が求まる． これを用いて，解

$$x = 35 \cdot 4 + 21 \cdot 3 + 15 \cdot 2 = 140 + 63 + 30 = 233$$

を得る． $233 \equiv 23 \pmod{105}$ より，**解１**と同じ解が得られた（当たり前だ）．

中国の南北朝時代（AD 439–589）に成立したとされる算術書【孫子算経】に，例 6.6 が**解２**と同じ趣旨の解法とともに書かれており（補遺参照），それが，定理 6.5 が “中国の剰余定理” と呼ばれる理由と言われている． **解２**は各合同式を同等に扱い（つまり対称性があり）理論的にもシンプルで優れていると思われるが，途中の計算の意味がとらえにくいのが欠点である． また，上の例ではわかりにくいが，法 $m_1, \ldots, m_r$ が大きい場合，**解１**に比べて**解２**はかなり大きな整数を扱うことになり計算が大変になる． 私自身は，紙とペンで計算するなら**解１**を選び、コンピュータ上にプログラミングするなら**解２**を選びたいが，皆さんならどうする？