

代数入門 試験問題 Jan. 29, 2016 (中野 伸)

[1] 合同式 $10x + 13 \equiv 0 \pmod{101}$ をみたす最小の自然数 x を求めよ .

[2] 整数 a, b, c が ,

$$a|c, \quad b|c, \quad \gcd(a, b) = 1$$

をみたすとする . このとき , c は ab の倍数であることを証明せよ .

[3] 連立合同式
$$\begin{cases} 2x + 21 \equiv 3x - 17 \pmod{46} \\ x - 14 \equiv 0 \pmod{77} \end{cases}$$
 をみたす最小の自然数 x を求めよ .

[4] $m > 1$, $\gcd(a(a-1), m) = 1$ をみたす整数 a, m を考える . 法 m に関する a の位数を t とすると ,

$$\sum_{k=0}^{t-1} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{t-1}$$

は m で割り切れることを証明せよ .

[5] $p = 2017$ に対して以下の間に答えよ . ただし , p が素数であることを用いてよい .

(1) 法 p に関する位数が 21 である自然数が存在することを証明せよ .

(2) 2 次合同式 $x^2 - 10x - 2 \equiv 0 \pmod{p}$ が整数解を持つかどうか判定せよ .

(3) 素数 q は合同式 $q \equiv 19 \pmod{8p}$ をみたすとする . このとき , 平方剰余記号 $\left(\frac{2p}{q}\right)$ を計算せよ .