

代数入門 試験問題 July. 26, 2017 (中野 伸)

注意: 数値等を求める問題について【答えのみ】と書いてあるもの以外は, 答えに至る考え方も書くこと.

- [1] 以下の数値を求めよ (存在しない場合は「なし」と答えよ).
- (1) 法 63 に関する 5 の位数を求めよ【答えのみ】.
 - (2) 635^{8667} を 63 で割った余りを求めよ【答えのみ】.
 - (3) $m^2 = 7^n + 9$ をみたす自然数の組 m, n をすべて求めよ【答えのみ】.
 - (4) 法 245 に関する零因子である整数 x で, $101 \leq x \leq 119$ をみたすものをすべて求めよ【答えのみ】.

- [2] a を整数, p を奇素数とする. 合同式

$$(*) \quad x^2 + ax \equiv 5 \pmod{p}$$

の整数解 x について以下の問いに答えよ.

- (1) $a = 10$ かつ $p = 79$ のとき, 合同式 (*) に解があるかどうか判定せよ.
 - (2) $p = 239$ のとき, 合同式 (*) の解が p を法としてただひとつであるような整数 a は存在しないことを示せ.
 - (3) $a = 6$ かつ $p \equiv 27 \pmod{56}$ のとき, 合同式 (*) に解があるかどうか判定せよ.
- [3] すべての自然数 n に対して, $3^{n+3} + 7^{3n+1}$ は 17 の倍数であることを示せ.
- [4] m を 2 以上の自然数とし, l を $\varphi(m)$ の素因数ではない素数とする.
- (1) $kl \equiv 1 \pmod{\varphi(m)}$ をみたす自然数 k が存在することを示せ.
 - (2) m と互いに素な任意の整数 a に対して, $x^l \equiv a \pmod{m}$ をみたす整数 x が存在することを示せ.
 - (3) 写像

$$f : (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times \rightarrow (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times, \quad \alpha \mapsto \alpha^l$$

は全単射であることを示せ.