

代数入門 試験問題 July 24, 2018 (中野 伸)

注意: 数値等を求める問題についても, 結果に至る考え方を書くこと

- [1] $p = 997, q = 1009$ はどちらも素数である. このことを認めた上で, 以下の問に答えよ.
- (1) $x \equiv 1 \pmod{p}$ かつ $x \equiv 2 \pmod{q}$ をみたす最小の自然数 x を求めよ.
 - (2) $5y \equiv q^p \pmod{p}$ をみたす絶対値が最小の整数 y を求めよ.
- [2] 51 の素因数分解が $51 = 3 \cdot 17$ であることに注意して, 以下の問に答えよ.
- (1) オイラー関数の値 $\varphi(51)$ を計算せよ.
 - (2) 51 を法とする 13 の位数を求めよ.
 - (3) 13^{222} を 51 で割った余りを求めよ.
- [3] 平方剰余に関する以下の問に答えよ.
- (1) 19 を法として 2 が平方剰余か平方非剰余かを, オイラーの規準 を用いて判定せよ.
 - (2) 素数 p が 19 を法として平方剰余であるためには, -19 が p を法として平方剰余であることが必要十分であることを示せ.
 - (3) $p \equiv 14 \pmod{19}$ をみたす素数 p を法として, -19 が平方剰余か平方非剰余か判定せよ.
- [4] 以下の問に答えよ.
- (1) $x^2 + 3y^2 \equiv 0 \pmod{101}$ をみたす整数 x, y はどちらも 101 の倍数であることを示せ.
 - (2) $f: \mathbf{Z}/36\mathbf{Z} \rightarrow (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})$ を自然な写像とするとき, $f(\alpha) = (\bar{3}, \bar{5})$ をみたす $\alpha \in \mathbf{Z}/36\mathbf{Z}$ を求めよ.