代数入門
まとめのレポート問題　その1

(中野 伸)

問題提示：2020 年 7 月 28 日 09:20

提出〆切：2020 年 7 月 31 日 12:00

注意: 数値を求める問題についても，結果に至る考え方を書くこと

[1]　合同式

(A) $$2x - 1 \equiv 0 \pmod 7$$

(B) $$35x + 25 \equiv p \pmod{112}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1)　合同式 (A) が

(C) $$x \equiv a \pmod m$$

と同値になるような，自然数 a, m を求めよ。

(2)　$p = 5$ のとき，合同式 (B) は整数解 x を持たないことを示せ．

(3)　合同式 (B) が整数解 x を持つような最小の素数 p を求めよ．

(4)　p を前問で求めた素数とするとき，合同式 (B) が

(D) $$x \equiv b \pmod n$$

と同値になるような，自然数 b, n を求めよ。

(5)　合同式 (C), (D) をともにみたす最小の自然数 x を求めよ．

代数入門
まとめのレポート問題　その2

(中野 伸)

問題提示：2020 年 7 月 28 日 09:20

提出〆切：2020 年 7 月 31 日 12:00

注意: 数値を求める問題についても，結果に至る考え方を書くこと

[2]　以下の問いに答えよ.

(1)　オイラー関数の値 $\varphi(861)$, $\varphi(2020)$ をそれぞれ求めよ.

(2)　861, 2020 が互いに素であることを示し，

$$861x + 2020y = 1$$

をみたす整数の組 x, y を求めよ.

(3)　法 2020 に関する 861 の逆元 c $(1 < c < 2020)$ を求めよ.

(4)　861^{798} を 2020 で割った余りを求めよ.

(5)　自然数 k と $k+2$ は，どちらも法 77 に関する零因子であるという. そのような最小の自然数 k を求めよ.

代数入門
まとめのレポート問題　その3

(中野 伸)

問題提示：2020 年 7 月 28 日 09:20

提出〆切：2020 年 7 月 31 日 12:00

[3]　自然数 n に対して，実数上の関数 $f_n(x) = x^{n-1} - \dfrac{1}{n}$ を考える．

(1)　n が素数ならば，任意の整数 a に対して，定積分

$$\int_0^a f_n(x)dx$$

は整数であることを示せ．

(2)　$n = 2p$ （ただし，p は奇素数）ならば，n と互いに素な整数 a に対して

$$f_n'(a) \equiv -1 \pmod{n}$$

であることを示せ．ここで，$f_n'(a)$ は $x = a$ における $f_n(x)$ の微分係数である．

(3)　<u>命題</u>　n を 3 以上の自然数とすると，$n^2 f_n(n)$ は少なくとも 3 個の相異なる素因数をもつ．

の証明が以下の囲みに書かれている．証明中の主張 (X), (Y) をそれぞれ示せ．

【証明】　$n^2 f_n(n)$ を因数分解して

$$n^2 f_n(n) = n^2 n^{n-1} - n = n(n^n - 1) = n(n-1)g(n)$$

を得る．ただし，$g(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} n^k = 1 + n + n^2 + \cdots + n^{n-1}$ である．

ここで，n と $n-1$ が互いに素であることは明らかだが，

(X)　n と $g(n)$ も互いに素であり，

(Y)　$n-1$ と $g(n)$ も互いに素である．

したがって，$n,\ n-1,\ g(n)$ それぞれの素因数を一つずつとれば，それらは相異なる．【証明終】