

代数入門 試験問題 July 26, 2022 (中野 伸)

注意: 数値等を求める問題についても, 結果に至る考え方を書くこと

- [1] 以下の問いに答えよ.
- (1) $n^3 + n - 5$ が $n + 3$ の倍数となる自然数 n をすべて求めよ.
 - (2) $a = 4067, b = 2407$ とする. a, b の最大公約数 d を求め, さらに $ax + by = d$ をみたす整数の組 (x, y) を 1 組求めよ.
 - (3) m を法として 6 と 13 が互いに逆元であるという. そのような自然数 $m \geq 2$ をすべて求めよ.
- [2] 以下の命題をそれぞれ証明せよ.
- (1) 等式 $x^2 - 9y^2 = 5$ をみたす整数 x, y は存在しない.
 - (2) 任意の自然数 $a \geq 2$ について, $a^9 - 1$ を法とする a の位数は 9 である.
- [3] 以下の問いに答えよ.
- (1) 合同式 $5x + 88 \equiv 0 \pmod{43}$ をみたす最小の自然数 x を求めよ.
 - (2) 2つの合同式 $5x + 88 \equiv 0 \pmod{43}, x \equiv 22 \pmod{34}$ を同時にみたす最小の自然数 x を求めよ.
 - (3) 2つの合同式 $x \equiv 7 \pmod{51}, x \equiv 22 \pmod{34}$ を同時にみたす整数 x は存在しないことを示せ.
- [4] $m = 945$ とするとき, 以下の問いに答えよ.
- (1) 31^{1298} を m で割った余りを求めよ.
 - (2) 素数 p が $p \equiv -1 \pmod{4m}$ をみたすとする. このとき, p を法として $3m$ が平方剰余か平方非剰余か判定せよ.