2 計算と論理関数

[I] 2進法による表現

- 数を 2 進法で表し 0 と 1 の有限列と考え、それに演算をほどこすための実際の機構を考える。
- 数 a を 2 進法で表すには ...
  - $\boxed{\text{方法 1}}$
    (1) a が偶数ならば 0 を、奇数ならば 1 を置く。
    (2) $[a/2]$ を 2 進法で表し、(1) の左に置く。
  - $\boxed{\text{方法 2}}$
    (1) $2^n \leq a < 2^{n+1}$ となる n をさがし、1 の右に n 桁の場所を用意する。
    (2) $a - 2^n$ を 2 進法で表し、(1) に重ねる。
- 例: 21 を 2 進法で表す;
  - $\boxed{\text{方法 1}}$で…
    (1) 21 は奇数だから、1 を置く。
    (2) $[21/2] = 10$ を 2 進法で表せば 1010 なので、 10101 が 21 の 2 進表記である。
  - $\boxed{\text{方法 2}}$で…
    (1) $16 \leq 21 < 32$ だから $n = 4$、したがって $1 \cdots\cdot$ となる。
    (2) $21 - 16 = 5$ を 2 進法で表せば 101 なので、 10101 を得る。

2^n の表

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

n	11	12	13	14	15	16	17
2^n	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072

[II] ２進法における筆算

- ２進法で表された数の筆算は十進法に比べてやさしい。

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
+) & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccc}
 & & & \times) & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

[III] 真偽表・論理関数

- ２進数表示された数の和を計算するために、まず次のような表を考える:

c	x	y	d	z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

- ２つの数の２進数表示が

$$a = x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0, \qquad b = y_n y_{n-1} \cdots y_1 y_0$$

で与えられるとき、a, b の和は次のようにして計算できる。

(1) $k = 0,\ c = 0$ とする。

(2) $x = x_k,\ y = y_k$ とし、c, x, y の値にしたがって、表から d, z を求める。

(3) $c = d,\ z_k = z$ とおく。

(4) $k+1$ をあらためて k とし (2) に戻り、k が n になるまで繰り返す。

(5) 以上によって求まった z_k を並べて、和 $dz_n \cdots z_1 z_0$ を得る。

- d, z はそれぞれ c, x, y に対して決まる。このような対応は**論理関数**と呼ばれ、

$$d = f(c, x, y), \qquad z = g(c, x, y)$$

のように表される。また、上の表は論理関数 f, g の**真偽表**と呼ばれる。

[IV] **基本論理関数**

- 写像 $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ を n 変数の**論理関数**という。
- 以下のように定義される

  NOT(x)$= \overline{x}$,　AND(x, y)$= x \wedge y$,　OR(x, y)$= x \vee y$

  を**基本論理関数**という;

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

- 公式 — 論理代数の公理

  NOT, AND, OR の間には以下の公式が成り立つ;

  (1) 交換法則

  $$x \wedge y = y \wedge x, \qquad x \vee y = y \vee x$$

  (2) 結合法則

  $$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,$$
  $$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

  (3) 吸収法則

  $$x \vee (y \wedge x) = (x \vee y) \wedge x = x$$

  (4) 分配法則

  $$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$
  $$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

  (5) 二重否定と相補法則

  $$\overline{\overline{x}} = x, \qquad x \wedge \overline{x} = 0, \qquad x \vee \overline{x} = 1$$

  (6) de Morgan の法則

  $$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}, \qquad \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$$

  (7) 0, 1 の性質

  $$x \wedge 0 = 0, \qquad x \wedge 1 = x,$$
  $$x \vee 0 = x, \qquad x \vee 1 = 1$$

- 和を計算するために考えた $d = f(c, x, y)$, $z = g(c, x, y)$ は、たとえば

  $$d = (\overline{c} \wedge (x \wedge y)) \vee (c \wedge (x \vee y)),$$

  $$z = (\overline{c} \wedge \overline{x} \wedge y) \vee (\overline{c} \wedge x \wedge \overline{y}) \vee (c \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (c \wedge x \wedge y)$$

  のように表すことができる。

[V] **論理関数の構成**

- 恒等関数は、たとえば、$\mathrm{AND}(x,x) = x \wedge x = x$ で定義でき、また、定数関数は、

$$\mathrm{AND}(x, \mathrm{NOT}(x)) = x \wedge \overline{x} = 0, \qquad \mathrm{OR}(x, \mathrm{NOT}(x)) = x \vee \overline{x} = 1$$

  で定義できる（ほとんど無意味）。

- **補題**　$D(x,y,z) = (x \wedge \overline{z}) \vee (y \wedge z)$ と定めれば、

$$D(x,y,z) = \begin{cases} x & (z = 0 \ \text{のとき}), \\ y & (z = 1 \ \text{のとき}) \end{cases}$$

  が成り立つ。

- **定理 2-1**　すべての論理関数は、NOT、AND、OR の合成で得られる。(前補題を援用して、変数の個数に関する帰納法によって証明できる。)

- NAND 関数、NOR 関数を

$$\mathrm{NAND}(x,y) = \mathrm{NOT}(\mathrm{AND}(x,y)) = \overline{x \wedge y}$$

$$\mathrm{NOR}(x,y) = \mathrm{NOT}(\mathrm{OR}(x,y)) = \overline{x \vee y}$$

  によって定義する;

x	y	$\mathrm{NAND}(x,y)$	$\mathrm{NOR}(x,y)$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

- **定理 2-2**　(1) すべての論理関数は、NAND の合成で得られる。
  (2) すべての論理関数は、NOR の合成で得られる。