4　Turing 機械の実例

[I] 数の表現

- 自然数 n に対して、1 を n 個並べたものを $\overline{n}$ で表し、自然数のペア (m,n) を、 $\overline{m}*\overline{n}$ で表す;

$$\overline{n} = \underbrace{1\,1\cdots 1}_{n}$$

$$\overline{m}*\overline{n} = \underbrace{1\,1\cdots 1}_{m}*\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n}$$

同様に、3 つ組は $\overline{l}*\overline{m}*\overline{n}$ で表す。4 つ以上の場合も同様。

- 機械 Z に対して、時点表示 $a\overline{n}$ または $a\overline{m}*\overline{n}$ 等を初期値とする Z-計算を考える。

$$a\overline{n} = a\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n} \to \cdots$$

- 機械 Z が停止したときの時点表示 (すなわち Z-計算の値) に含まれる 1 の総数を計算結果とし、$\mathrm{N_Z}(n)$ または $\mathrm{N_Z}(m,n)$ 等で表す。

[II] 例

(i) $f(n)=0$ (定数関数):　Z は 2 つの指令からなる;

指令:　$a\ 1\ \#\ a,\quad a\ \#\ \mathrm{R}\ a$

動作:　$a\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n} \to a\,\#\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n-1} \to \#\,a\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n-1} \to \cdots$

$$\to \underbrace{\#\,\#\cdots\#}_{n-1}a\,1 \to \underbrace{\#\,\#\cdots\#}_{n-1}a\,\# \to \overbrace{\underbrace{\#\,\#\cdots\#}_{n-1}\#}^{n}a\,0$$

(ii) $f(n)=1$ (定数関数):　Z は 3 つの指令からなる;

指令:　$a\ 1\ \#\ a,\quad a\ \#\ \mathrm{R}\ a,\quad a\ 0\ 1\ b$

動作:　$a\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n} \to \underbrace{\#\,\#\cdots\#}_{n}a\,0$ (上記と同様) $\to \underbrace{\#\,\#\cdots\#}_{n}b\,1$

(iii) $f(n)=n+1$:

指令:　$a\ 1\ \mathrm{L}\ b,\quad a\ 0\ 1\ b,\quad b\ 0\ 1\ b$

動作:　$a\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n} \to b\,0\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n} \to b\overbrace{1\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n}}^{n+1}$

(iv) $f(m,n) = m+n$: 和を計算する機械はきわめて簡単に定義できる;

指令: なし

動作: $a\,\underbrace{1\,1\cdots 1}_{m} * \underbrace{1\,1\cdots 1}_{n}$ (変化しない)

(v) $f(n) = \begin{cases} 0, & n=0, \\ 1, & n>0 \end{cases}$:

指令: $a\ 1\ \mathrm{R}\ b$, $a\ 0\ 0\ b$, $b\ 1\ 0\ c$, $c\ 0\ \mathrm{R}\ b$

動作: $a\,\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n} \to 1\ b\,\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n-1} \to 1\ c\ 0\,\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n-2} \to$

$1\ 0\ b\,\underbrace{1\,1\cdots 1}_{n-2} \to \cdots \to 1\ \underbrace{0\,0\cdots 0}_{n-2}\,b\ 1 \to$

$1\ \underbrace{0\,0\cdots 0}_{n-2}\,c\ 0 \to 1\ \underbrace{0\,0\cdots 0}_{n-1}\,b\ 0$

(vi) $f(m,n) = \begin{cases} 0, & m>n, \\ n-m, & m\le n \end{cases}$:

指令:

$\left.\begin{array}{l} a\ 1\ 0\ a \\ a\ 0\ \mathrm{R}\ b \\ b\ 1\ \mathrm{R}\ b \\ b * \mathrm{R}\ b \\ b\ 0\ \mathrm{L}\ c \end{array}\right\}$ 左端の 1 を一つ消し右へ移動する

$\left.\begin{array}{l} c\ 1\ 0\ c \\ c\ 0\ \mathrm{L}\ d \\ c * \mathrm{L}\ d \end{array}\right\}$ 右端に 1 があれば一つ消し、左へ一つ移動する

$\left.\begin{array}{l} d\ 1\ \mathrm{L}\ d \\ d * \mathrm{L}\ d \\ d\ 0\ \mathrm{R}\ a \end{array}\right\}$ 左端まで移動する

(vii) $f(n) = 2n$:

指令:

$\left.\begin{array}{l} a\ 1\ \#\ a \\ a\ \#\ \mathrm{R}\ b \end{array}\right\}$ (1) 1 を # に書き換える

$\left.\begin{array}{l} b\ 1\ \mathrm{R}\ b \\ b\ 0\ \mathrm{R}\ c \\ c\ 1\ \mathrm{R}\ c \\ c\ 0\ 1\ d \end{array}\right\}$ (2) 右へ移動し、二つめの 0 を 1 に書き換える

$$\left.\begin{array}{l} d\ 1\ \mathrm{L}\ d \\ d\ 0\ \mathrm{L}\ e \\ e\ 1\ \mathrm{L}\ e \end{array}\right\}\quad \text{左へ移動し、(3) または (4) へ}$$

$$\left.\begin{array}{l} e\ \#\ 0\ f \\ f\ 0\ \mathrm{R}\ b \end{array}\right\}\quad \text{(3) ＃に到達したら、0 に書き換え、(2) へもどる}$$

$$\begin{array}{l} e\ 0\ \mathrm{R}\ a \end{array}\qquad \text{(4) 0 に到達したら、(1) へもどる}$$

(viii) $f(m,n) = mn$:

指令:

$$\left.\begin{array}{l} a\ *\ \mathrm{R}\ i \\ a\ 1\ 0\ a \\ a\ 0\ \mathrm{R}\ b \end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\text{(1) 左端に 1 があればそれを消し (2) へ、} \\ \quad\text{なければ (5) へ}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} b\ 1\ \mathrm{R}\ b \\ b\ *\ \mathrm{R}\ c \end{array}\right\}\quad \text{(2) ＊の右まで移動する}$$

$$\left.\begin{array}{l} c\ 1\ \#\ c \\ c\ \#\ \mathrm{R}\ d \end{array}\right\}\quad \text{(3) 1 を＃に書き換える}$$

$$\left.\begin{array}{l} d\ 1\ \mathrm{R}\ d \\ d\ 0\ \mathrm{R}\ e \\ e\ 1\ \mathrm{R}\ e \\ e\ 0\ 1\ f \end{array}\right\}\quad \text{右へ移動し、二つめの 0 を 1 に書き換える}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\ 1\ \mathrm{L}\ f \\ f\ 0\ \mathrm{L}\ f \\ f\ \#\ 1\ g \end{array}\right\}\quad \text{＃の位置まで左へ移動し、＃を 1 に書き換える}$$

$$\left.\begin{array}{l} g\ 1\ \mathrm{R}\ c \\ c\ 0\ \mathrm{L}\ h \end{array}\right\}\quad \text{右へ一つ移動し、1 があれば (3) へ、なければ (4) へ}$$

$$\left.\begin{array}{l} h\ 1\ \mathrm{L}\ h \\ h\ *\ \mathrm{L}\ h \\ h\ 0\ \mathrm{R}\ a \end{array}\right\}\quad \text{(4) 左端に移動し、(1) へもどる}$$

$$\left.\begin{array}{l} i\ 1\ \#\ i \\ i\ \#\ \mathrm{R}\ i \end{array}\right\}\quad \text{(5) 第二引数 } n \text{ に相当する 1 をすべて＃に書き換える}$$

[III] 機械化可能性

- **定義** $f(x_1, \cdots, x_n)$ を自然数の上で定義された自然数値関数とする。このとき、機械 Z で、任意の $x_1, \cdots, x_n$ に対して、

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Z}}(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n)$$

  なるものが存在するとき、f は機械化可能であるという。

- **定理 4-1** 自然数上の定数関数、和、積は、それぞれ機械化可能である。
- **定理 4-2** 機械化可能な自然数値関数の合成は機械化可能である。