6 原始帰納的述語

[I] **特性関数**

自然数の変数 $x_1, \cdots, x_n$ に関する述語 (命題) $A(x_1, \cdots, x_n)$ について、

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} 0 & A(x_1, \cdots, x_n) \text{ が成り立つとき}, \\ 1 & A(x_1, \cdots, x_n) \text{ が成り立たないとき}, \end{cases}$$

なる関数 f が存在するとき、 f を A の**特性関数**という。特性関数が原始帰納的であるような述語を**原始帰納的述語**という。

- $x = y$ は原始帰納的述語である;

$$x = y \iff \mathrm{sg}(|x - y|) = 0$$

$$x \neq y \iff \mathrm{sg}(|x - y|) = 1$$

- $x \leq y$ は原始帰納的述語である;

$$x \leq y \iff \mathrm{sg}(x \smile y) = 0$$

- $x < y$ は原始帰納的述語である;

$$x < y \iff 1 \smile (y \smile x) = 0$$

- “x は y で割り切れる” は原始帰納的述語である;

$$x \text{ は } y \text{ で割り切れる} \iff \mathrm{sg}(\mathrm{rem}(x, y)) = 0$$

- “x は素数である” は原始帰納的述語である;

$$x \text{ は素数} \iff \mathrm{Prime}(x) = 0$$

[II] NOT, AND, OR

述語 $A(x_1,\cdots,x_n)$, $B(x_1,\cdots,x_n)$ の特性関数をそれぞれ $g(x_1,\cdots,x_n)$, $h(x_1,\cdots,x_n)$ とするとき、

$$\overline{\mathrm{sg}}(g(x_1,\cdots,x_n)),$$

$$\mathrm{sg}(g(x_1,\cdots,x_n)+h(x_1,\cdots,x_n)),$$

$$g(x_1,\cdots,x_n)\cdot h(x_1,\cdots,x_n)$$

はそれぞれ

A でない,　　A かつ B,　　A または B

の特性関数である。とくに A, B **が原始帰納的ならば、これらも原始帰納的述語である**。

[III] 場合分けによる関数の定義

自然数の変数 $x_1,\cdots,x_n$ に関する m 個の述語

$$A_1(x_1,\cdots,x_n),\ \cdots\ ,A_m(x_1,\cdots,x_n)$$

で、任意の $x_1,\cdots,x_n$ に対して、$A_i(x_1,\cdots,x_n)$ のうち 2 つは同時に成り立たないようなものを一組固定する。さらに m 個の関数

$$g_1(x_1,\cdots,x_n),\ \cdots\ ,g_m(x_1,\cdots,x_n)$$

をとって、

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases} g_1(x_1,\cdots,x_n), & A_1(x_1,\cdots,x_n)\text{ が成り立つとき}, \\ \vdots & \vdots \\ g_m(x_1,\cdots,x_n), & A_m(x_1,\cdots,x_n)\text{ が成り立つとき}, \\ 0, & \text{どれも成り立たないとき}, \end{cases}$$

によって、関数 f を定義する。いま A_i の特性関数を h_i とすれば、

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m} g_i(x_1,\cdots,x_n)\cdot\overline{\mathrm{sg}}(h_i(x_1,\cdots,x_n))$$

が成り立つ。したがって、**もし** $A_1,\cdots,A_m$ **が原始帰納的述語であり、かつ** $g_1,\cdots,g_m$ **が原始帰納的関数ならば、**f **も原始帰納的関数である**ことがわかる。

[IV] **有界最小化**

自然数の $n+1$ 変数の述語 $A(y, x_1, \cdots, x_n)$ に対して

$$f(t, x_1, \cdots, x_n) = \min\{\, y \mid A(y, x_1, \cdots, x_n) \text{ または } y > t \,\}$$

なる $n+1$ 変数関数 f を A に関する**有界最小化**といい

$$\mu_{y \le t}\,[A(y, x_1, \cdots, x_n)]$$

で表す。 すなわち $\mu_{y \le t}\,[A(y, x_1, \cdots, x_n)]$ は、$y \le t$ かつ $A(y, x_1, \cdots, x_n)$ なる y が存在するならばその最小値、存在しないならば $t+1$ を値とする関数である。A の特性関数を h とすると

$$\mu_{y \le t}\,[A(y, x_1, \cdots, x_n)] = \sum_{z=0}^{t} \prod_{y=0}^{z} h(y, x_1, \cdots, x_n)$$

が成り立つ。 したがって、とくに**原始帰納的述語に関する有界最小化は原始帰納的関数である**。

この方法で得られる原始帰納的関数の例を以下にあげる。

- $\sqrt{x}$ の整数部分;

  $$\mathrm{isqr}(x) = \mu_{y \le x}\,[\, x < (y+1)^2 \,]$$

- $\sqrt[n]{x}$ の整数部分;

  $$\mathrm{irt}(n, x) = \mu_{y \le x}\,[\, x < (y+1)^n \,]$$

- $x+1$ 番目の素数 $\mathrm{NP}(x)$;

  $$\mathrm{NP}(0) = 2, \quad \mathrm{NP}(1) = 3, \quad \mathrm{NP}(2) = 5, \quad \mathrm{NP}(3) = 7, \ \cdots$$

  これは、有界最小化

  $$f(x, t) = \mu_{y \le t}\,[\, x < y \text{ かつ } y \text{ は素数} \,]$$

  によって

  $$\begin{cases} \mathrm{NP}(0) = 2 \\ \mathrm{NP}(x') = f(\mathrm{NP}(x),\ \mathrm{NP}(x)\,! + 1) \end{cases}$$

  と定義できる。(Bertrand's postulate を用いると

  $$\begin{cases} \mathrm{NP}(0) = 2 \\ \mathrm{NP}(x') = f(\mathrm{NP}(x),\ 2\mathrm{NP}(x)) \end{cases}$$

  とも定義できることがわかる。)

[V] **最小化**

一般に、述語 $A(y, x_1, \cdots, x_n)$ に対して

$$g(x_1, \cdots, x_n) = \min \{\ y \mid A(y, x_1, \cdots, x_n)\ \}$$

によって関数 g が定義できるとき、g を A に関する**最小化**といい、

$$\mu_y \left[A(y, x_1, \cdots, x_n)\right]$$

で表す。 A の特性関数を h とすれば、前と同様にして形式的に

$$\mu_y \left[A(y, x_1, \cdots, x_n)\right] = \sum_{z=0}^{\infty} \prod_{y=0}^{z} h(y, x_1, \cdots, x_n)$$

と書ける。このようにして関数が定義されるためには、

『任意の $x_1, \cdots, x_n$ に対して $A(y, x_1, \cdots, x_n)$ なる y が存在する』

ことが必要十分である。

原始帰納的述語に関する有界最小化は原始帰納的であるが、**最小化は一般には原始帰納的とは限らない**ことが知られている。