7 原始帰納的関数と最小化の関係

[I] 関数・述語のクラス

基本関数

零関数 : $N(x) = 0$

後者関数 : $S(x) = x'$

射影関数 : $P_i^n(x_1, \cdots, x_n) = x_i$

と、以下の関数

和 : $x + y$

積 : xy

半差 : $x \smile y$

をあわせて**算術的基本関数**という。 これらを初期関数として、いくつかの関数・述語のクラスを定義する。

- $\mathcal{R}$： 原始帰納的関数・述語のクラス；
  原始帰納的関数（すなわち、(算術的) 基本関数に合成または帰納的定義を有限回ほどこして得られる関数)、およびそれらによって定まる述語。

- $\mathcal{M}$： 最小化による関数・述語のクラス；
  算術的基本関数に合成または最小化を有限回ほどこして得られる関数、およびそれらによって定まる述語。

- $\mathcal{M}_B$： 有界最小化による関数・述語のクラス；
  算術的基本関数に合成または有界最小化を有限回ほどこして得られる関数、およびそれらによって定まる述語。

原始帰納的述語から有界最小化により定義される関数は原始帰納的であったから、$\mathcal{M}_B$ に属する関数・述語はすべて $\mathcal{R}$ に属する。 このことを

$$\mathcal{M}_B \subset \mathcal{R}$$

で表す。 一方、

$$\mathcal{M}_B \subset \mathcal{M}$$

が成り立つことは明らかである。

[II] $\mathcal{M}_B$ に属する関数・述語

(i) $\overline{\mathrm{sg}}(x)$ および $\mathrm{sg}(x)$ は $\mathcal{M}_B$ に属する。

$$\overline{\mathrm{sg}}(x) = 1 \smile x, \qquad \mathrm{sg}(x) = 1 \smile \overline{\mathrm{sg}}(x)$$

(ii) $|x-y|$ は $\mathcal{M}_B$ に属する。

$$|x-y| = (x \smile y) + (y \smile x)$$

(iii) $x = y$ および $x \neq y$ は $\mathcal{M}_B$ に属する。

$\mathrm{sg}(|x-y|),\ \overline{\mathrm{sg}}(|x-y|)$ がそれぞれの特性関数

(iv) $x < y$ および $x \leq y$ は $\mathcal{M}_B$ に属する。

$\overline{\mathrm{sg}}(y \smile x),\ \mathrm{sg}(x \smile y)$ がそれぞれの特性関数

(v) 述語 A, B が $\mathcal{M}_B$ に属するならば、

A でない, $\qquad$ A かつ B, $\qquad$ A または B

も $\mathcal{M}_B$ に属する。

(vi) $\mathrm{quo}(x,y)$ は $\mathcal{M}_B$ に属する。

$$\mathrm{quo}(x,y) = \mu_{z \leq x}\,[x < y(z+1) \quad \text{または} \quad y = 0]$$

(vii) $\mathrm{rem}(x,y)$ は $\mathcal{M}_B$ に属する。

$$\mathrm{rem}(x,y) = x \smile y \cdot \mathrm{quo}(x,y)$$

(viii) $x \equiv y \pmod z$ は $\mathcal{M}_B$ に属する。

$\mathrm{sg}(\mathrm{rem}(|x-y|\,, z))$ が特性関数

(ix) 「x は素数である」は $\mathcal{M}_B$ に属する。

x は素数である

$$\iff \quad 1 < x \ \text{かつ}\ \mu_{d \leq x}\,[\,1 < d\ \text{かつ}\ \mathrm{rem}(x,d) = 0\,] = x$$

(x) $x/2$ および $\sqrt{x}$ の整数部分 $[x/2]\,,\ [\sqrt{x}]$ は $\mathcal{M}_B$ に属する。

$$[x/2] = \mu_{y \leq x}\,[x < 2(y+1)]\,, \quad [\sqrt{x}] = \mu_{y \leq x}\,[x < (y+1)^2]$$

(xi) $x(x+1)/2$ は $\mathcal{M}_B$ に属する。

$$\frac{x(x+1)}{2} = \mu_{j \leq x^2}\,[2j = x(x+1)]$$

[III] **簡単な補題**　二つの自然数列 $\{a_i\}, \{b_j\}$ および自然数 x に対して、

$$
\begin{aligned}
&a_j = b_j \quad (j = 0, 1, \cdots, x-1) \\
&\quad \Longleftrightarrow \quad x = \mu_{j \le x}[\, a_j \ne b_j \ \ \text{または} \ \ j = x \,].
\end{aligned}
$$

[IV] **重要な補題**　次の $(*)$ をみたす $\mathcal{M}_B$ に属する 2 変数関数 $T(i, w)$ が存在する；

$$
(*) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\text{任意の自然数の有限列 } a_0, a_1, \cdots, a_n \text{ に対して、} \\
\qquad\qquad a_i = T(i, w_0) \qquad (i = 0, 1, \cdots, n) \\
\text{をみたす自然数 } w_0 \text{ が存在する。}
\end{array}
\right.
$$

—証明は次章で行う—

[V] **定理**　$\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$.

[証明]　$\mathcal{M}$ に属する関数から帰納的定義によって定まる関数が、再び $\mathcal{M}$ に属することをいえばよい。 簡単のため、変数の個数が少ない場合を考える。すなわち、$g(x, z), h(y, x, z)$ が $\mathcal{M}$ に属すると仮定して、

$$
(*) \quad \left\{
\begin{array}{l}
f(0, z) = g(0, z) \\
f(x', z) = h(f(x, z), x, z)
\end{array}
\right.
$$

によって定まる $f(x, z)$ が $\mathcal{M}$ に属することを示す（一般の場合も同様に示される)。

さて、しばらく x, z を固定し、有限数列

$$
f(0, z), \ f(1, z), \ \ldots, \ f(x, z)
$$

を考える。 このとき、**重要な補題**に現れる $\mathcal{M}_B$ に属する関数 $T(i, w)$ を用いれば、ある自然数 w_0 をとって

$$
f(i, z) = T(i, w_0) \quad (i = 0, 1, \cdots, x)
$$

が成り立つようにできる。 上の帰納的定義 $(*)$ に当てはめれば、

$$
\left\{
\begin{array}{l}
T(0, w_0) = g(0, z) \\
T(j+1, w_0) = h(T(j, w_0), j, z), \quad (j = 0, 1, \ldots, x-1)
\end{array}
\right.
$$

となる。 さらに、下の x 個の式に対して、両辺を自然数列とみて**簡単な補題**を適用すれば

$$\begin{cases} T(0, w_0) = g(0, z) \\ x = \mu_{j \le x} [\ T(j+1, w_0) \ne h(T(j, w_0), j, z) \text{ または } j = x\ ] \end{cases}$$

と書き換えられる。 このような w_0 の存在から、$\mathcal{M}$ に属する関数

$$G(x, z) = \mu_w [\ T(0, w) = g(0, z) \quad \text{かつ}$$

$$x = \mu_{j \le x} [\ T(j+1, w) \ne h(T(j, w), j, z) \text{ または } j = x\ ]$$

$$]$$

が定義でき、

$$f(x, z) = T(x, G(x, z))$$

が成り立つことがわかる。

いま、g, h, T は $\mathcal{M}$ に属するから、これらを用いて最小化により定義される $G(x, z)$ は $\mathcal{M}$ に属する。 したがって、$f(x, z)$ が $\mathcal{M}$ に属することが示された。 （証明終わり）