8 「重要な補題」の証明

[I] **自然数のペア** 自然数全体の集合と自然数のペア全体の集合は同じ濃度を持ち、関数

$$J(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

はこれらの間の 1 対 1 対応を具体的に与える。 J は $\mathcal{M}_B$ に属する。 また、K, L を

$$w = J(x,y) \iff x = K(w),\ y = L(w)$$

すなわち、

$$w = J(K(w), L(w))$$

によって定まる 1 変数関数とすれば、

$$K(w) = \mu_{x \le w}\,[\ \mu_{y \le w}\,[J(x,y) = w] \le w\ ]$$

$$L(w)\ = \mu_{y \le w}\,[\ \mu_{x \le w}\,[J(x,y) = w] \le w\ ]$$

となる。 とくに、K, L は $\mathcal{M}_B$ に属する。

[II] **中国の剰余定理** $m_1, \cdots, m_n$ をどの二つも互いに素な整数とすると、任意の整数の組 $a_1, \cdots, a_n$ に対して

$$a \equiv a_i \pmod{m_i} \quad (1 \le i \le n)$$

をみたす整数 a が存在する。

[III] **大切な補題** 次の ($\sharp$) をみたす $\mathcal{M}_B$ に属する 2 変数関数 $M(i,x)$ が存在する；

$$(\sharp) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{任意の } n > 0 \text{ および } A \ge 0 \text{ に対して、} \\ \qquad \left\{ \begin{array}{l} M(i,x_0) \text{ と } M(j,x_0) \text{ は互いに素} \quad (0 \le i < j \le n) \\ A < M(i,x_0) \quad (0 \le i \le n) \end{array} \right. \\ \text{をみたす自然数 } x_0 \text{ が存在する。} \end{array} \right.$$

[**証明**] $M(i,x) = 1 + (i+1)x$ とおけばよいことを以下で示す。 いま、n, A に対して、自然数 x_0 を $n!$ の倍数で $A - 1 < x_0$ をみたすようにとる。 このとき、$A < 1 + (i+1)x_0$ $(i = 0, \cdots, n)$ となることは明らかである。 さらに、

ある $0 \leq i < j \leq n$ について $1+(i+1)x_0, 1+(j+1)x_0$ が互いに素でないとすると、素数 p が存在して

$$1+(i+1)x_0 \equiv 1+(j+1)x_0 \equiv 0 \pmod p$$

となる。 このとき $(j-i)x_0 \equiv 0 \pmod p$ であるが、$0 < j-i \leq n$ より $j-i$ は $n!$ の、したがって x_0 の約数となるから、結局 $x_0 \equiv 0 \pmod p$ が導かれ、

$$1 \equiv 1+(i+1)x_0 \equiv 0 \pmod p$$

となって矛盾する。 よって、$1+(i+1)x_0, 1+(j+1)x_0$ は互いに素である。
（証明終わり）

[IV] **「重要な補題」の証明：**

まず、**大切な補題**の $M(i,x)$ を用いて、3 変数関数

$$U(i,x,y) = \mu_{t \leq M(i,x) \smile 1} [\, y \equiv t \pmod{M(i,x)}]$$

を定義すれば、これは $\mathcal{M}_B$ に属する。 いま、自然数の有限列 $a_0, \cdots, a_n$ に対して、$A = \max\{a_0, \cdots, a_n\}$ とおき、**大切な補題**の条件 ($\sharp$) をみたすように x_0 をとる。 さらに、**中国の剰余定理**を用いれば、

$$y_0 \equiv a_i \pmod{M(i,x_0)} \quad (0 \leq i \leq n)$$

となるように y_0 を選ぶことができる。 このとき、$U(i,x,y)$ および A の定義から、各 $i = 0, \cdots, n$ に対し

$$\begin{cases} 0 \leq U(i,x_0,y_0) \leq a_i \leq A < M(i,x_0) \\ U(i,x_0,y_0) \equiv a_i \pmod{M(i,x_0)} \end{cases}$$

であり、したがって $U(i,x_0,y_0) = a_i$ でなければならない。以上より、$U(i,x,y)$ は次の ($\flat$) をみたすことが示された；

$$(\flat) \quad \begin{cases} \text{任意の自然数の有限列 } a_0, a_1, \cdots, a_n \text{ に対して、} \\ \qquad a_i = U(i,x_0,y_0) \qquad (i = 0, 1, \cdots, n) \\ \text{をみたす自然数 } x_0, y_0 \text{ が存在する。} \end{cases}$$

そこで、

$$T(i,w) = U(i, K(w), L(w))$$

とおけば、T は $\mathcal{M}_B$ に属し、**重要な補題**の ($*$) をみたす。 （証明終わり）