9　算術化

[I] 原始帰納的関数のゲーデル数

まず、原始帰納的関数の “定義の仕方” を復習しておく。

原始帰納的関数とは以下のいずれかで与えられる関数のことである。

(i) 零関数;　$N(x) = 0$

(ii) 後者関数; $S(x) = x'$

(iii) 射影関数; $P_i^n(x_1, \cdots, x_n) = x_i$

(iv) 与えられた原始帰納的関数 $g_1, \cdots, g_m, h$ から合成によって得られる f;

$$f(x_1, \cdots, x_n) = h(g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_m(x_1, \cdots, x_n))$$

(v) 与えられた原始帰納的関数 g, h から帰納的定義によって得られる f;

$$\begin{cases} f(0, x_1, \cdots, x_n) = g(0, x_1, \cdots, x_n) \\ f(x', x_1, \cdots, x_n) = h(f(x, x_1, \cdots, x_n), x, x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

これらそれぞれの場合に応じて、原始帰納的関数 f の**ゲーデル数**と呼ばれる自然数 $\ulcorner f \urcorner$ を次のように “帰納的” に定める。

(i) $\ulcorner N \urcorner = 2$

(ii) $\ulcorner S \urcorner = 6$

(iii) $\ulcorner P_i^n \urcorner = 2^n 5^i$

(iv) $\ulcorner f \urcorner = 2^n 3^{\ulcorner g_1 \urcorner} \cdots p_m^{\ulcorner g_m \urcorner} p_{m+1}^{\ulcorner h \urcorner}$

(v) $\ulcorner f \urcorner = 2^{n+1} 3^{\ulcorner g \urcorner} 5^{\ulcorner h \urcorner}$

いくつか注意点をあげておく。

- (iii) において、n, i は $1 \le i \le n$ をみたす。
- (iv) の p_k は $k+1$ 番目の素数、すなわち $p_k = \mathrm{NP}(k)$ とする。また、$n, m \ge 1$ である。
- (v) においては、$n \ge 0$ である。
- 任意の原始帰納的関数 f に対して、$\nu(2, \ulcorner f \urcorner)$ は f の変数の数となっている。
- ゲーデル数 $\ulcorner f \urcorner$ は「関数 f の定義の仕方」によって定まるものであり、関数 f のみによって定まるものではないが、異なる原始帰納的関数には異なるゲーデル数が対応する。

例として、和 $\mathrm{pls}(x,y)=x+y$ のゲーデル数を計算する;

$$\begin{cases} \mathrm{pls}(0,y)=P^2_2(0,y) \\ \mathrm{pls}(x',y)=h(\mathrm{pls}(x,y),x,y), \quad \text{ただし } h(x,y,z)=S(P^3_1(x,y,z)) \end{cases}$$

であるから、

$$\ulcorner \mathrm{pls} \urcorner = 2^2 3^{\ulcorner P^2_2 \urcorner} 5^{\ulcorner h \urcorner},$$

$$\ulcorner P^2_2 \urcorner = 2^2 5^2, \qquad \ulcorner h \urcorner = 2^3 3^{\ulcorner P^3_1 \urcorner} 5^{\ulcorner S \urcorner} = 2^3 3^{2^3 5^1} 5^6$$

したがって pls のゲーデル数は

$$\ulcorner \mathrm{pls} \urcorner = 2^2 3^{(2^2 5^2)} 5^{(2^3 3^{(2^3 5^1)} 5^6)} = 2^2 3^{100} 5^{151970818238211610012 5000}$$

となる。

[II] 原始帰納的関数の判定

原始帰納的関数のゲーデル数について次の定理が成り立つ。

定理 自然数 x に関する述語;

x はある原始帰納的関数のゲーデル数である

は原始帰納的述語である。

これを示すために、関数

$$\mathrm{PRF}(x) = \begin{cases} n, & x \text{ が } n \text{ 変数原始帰納的関数のゲーデル数のとき}, \\ 0, & \text{そうでないとき}, \end{cases}$$

が原始帰納的であることをみる。

実際、x が以下の (G1)–(G5) のいずれかを満たすとき、$\mathrm{PRF}(x) = \nu(2, x)$ とし、いずれも満たさないときは 0 として定義すればよい。

(G1) $x = 2$

(G2) $x = 6$

(G3) $\mathrm{spf}(x) = 2 \cdot 5$ かつ $\nu(2, x) \geq \nu(5, x)$

(G4) $1 \leq m \leq x$ なる m で以下をみたすのものが存在する;

$$\mathrm{spf}(x) = 2 \cdot 3 \cdots p_{m+1} \quad \text{かつ} \quad m = \mathrm{PRF}(\nu(p_{m+1}, x)) \quad \text{かつ}$$
$$\nu(2, x) = \mathrm{PRF}(\nu(p_1, x)) = \cdots = \mathrm{PRF}(\nu(p_m, x))$$

(G5) $\mathrm{spf}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 5$ かつ $\nu(2, x) + 1 = \mathrm{PRF}(\nu(3, x)) + 1 = \mathrm{PRF}(\nu(5, x))$

ここで、(G1)–(G5) はすべて原始帰納的述語であり、また、$x \geq 1$ ならば任意の素数 p について $\nu(p, x) < x$ だから、PRF は帰納的定義によって得られることになる。したがって、PRF は原始帰納的である。

[III] 原始帰納的関数の数え上げ

すべての原始帰納的関数のゲーデル数を小さい順に並べて $x+1$ 番目のゲーデル数を値とする関数 $\mathrm{EN}(x)$ は、次のように定義できる;

$$\begin{cases} \mathrm{EN}(0) = 2 \\ \mathrm{EN}(x') = \mu_{y \le B(x)} \{\ y > \mathrm{EN}(x) \text{ かつ } \mathrm{PRF}(y) > 0\ \} \end{cases}$$

ただし　$B(x) = 2^{\mathrm{EN}(x)}5$

ここで、$B(x)$ は射影関数 $P_1^{\mathrm{EN}(x)}$ のゲーデル数であり、$B(x) > \mathrm{EN}(x)$ が成り立っている。

$n \ge 1$ として、すべての n 変数原始帰納的関数のゲーデル数を小さい順に並べて $x+1$ 番目のゲーデル数を値とする関数 $\mathrm{NEN}(n,x)$ は、次のように定義できる;

$$\begin{cases} \mathrm{NEN}(n,0) = \begin{cases} 2, & n = 1, \\ 2^n 5, & n \ge 2, \end{cases} \\ \mathrm{NEN}(n,x') = \mu_{y \le B(n,x)} \{\ y > \mathrm{NEN}(n,x) \text{ かつ } \mathrm{PRF}(y) = n\ \} \end{cases}$$

ただし　$B(n,x) = 2^n 3^{\mathrm{NEN}(n,x)} 5^2$

ここで、$\mathrm{NEN}(n,x)$ をゲーデル数としてもつ関数を $g(x_1,\cdots,x_n)$ とすると、$B(n,x)$ は g と零関数との合成 $N(g(x_1,\cdots,x_n))$ で表される n 変数関数のゲーデル数であり、$B(n,x) > \mathrm{NEN}(n,x)$ が成り立っている。

また、便宜的に $\mathrm{NEN}(0,x) = 0$ としておく。