１０　ゲーデル数からの原始帰納的関数の構成

[I] 与えられた自然数をゲーデル数にもつ原始帰納的関数の構成

以後、簡単のため

$$\begin{cases} \nu_i(x) = \nu(p_{i-1}, x), \quad i = 1, 2, \cdots \\ \langle e_1, e_2, \cdots, e_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} p_{i-1}^{e_i} = 2^{e_1} 3^{e_2} \cdots p_{n-1}^{e_n} \end{cases}$$

とする。

定理１　x が原始帰納的関数 f のゲーデル数のとき、

$$\mathrm{Papl}(x, y) = f(\nu_1(y), \cdots, \nu_n(y)), \quad \text{ただし } n = \mathrm{PRF}(x),$$

そうでないとき $\mathrm{Papl}(x, y) = 0$ となるような $\mathcal{M}$ に属する２変数関数 $\mathrm{Papl}(x, y)$ が存在する。

証明：　$\mathrm{PRF}(x)$ の定義の際の x の条件 (G1)–(G5) によって場合分けして、次のように $\mathrm{Papl}(x, y)$ を定義する。

(G1) のとき、

$$\mathrm{Papl}(2, y) = 0$$

(G2) のとき、

$$\mathrm{Papl}(6, y) = S(\nu_1(y))$$

(G3) のとき、$n = \nu(2, x), \quad i = \nu(5, x)$ とし、

$$\mathrm{Papl}(x, y) = \nu_i(y)$$

(G4) のとき、条件をみたす m をとり、$x_i = \nu(p_i, x), \quad i = 1, \cdots, m+1$ とし、

$$\mathrm{Papl}(x, y) = \mathrm{Papl}(x_{m+1}, \langle \mathrm{Papl}(x_1, y), \cdots, \mathrm{Papl}(x_m, y) \rangle)$$

(G5) のとき、$n = \nu(2, x) - 1$ とし、

$$\mathrm{Papl}(x, y) = T(\nu_1(y), G(\nu_1(y), \cdots, \nu_{n+1}(y))),$$

ただし、$G(z, z_1, \cdots, z_n)$ は次のように定義される;

$$\begin{aligned} & G(z, z_1, \cdots, z_n) = \mu_w[\\ & \quad T(0, w) = \mathrm{Papl}(x_g, \langle 0, z_1, \cdots, z_n\rangle) \ \text{かつ} \\ & \quad z = \mu_{j \le z}[\, T(j+1, w) \ne \mathrm{Papl}(x_h, \langle T(j, w), j, z_1, \cdots, z_n\rangle) \\ & \qquad\qquad\qquad \text{または } j = z\,]] \end{aligned}$$

ここで、$x_g = \nu(3, x), x_h = \nu(5, x)$ とする。

最後に、(G1)–(G5) のいずれでもないとき、$\mathrm{Papl}(x, y) = 0$ と定めれば、$\mathrm{Papl}(x, y)$ は求める関数となる。 (証明終)

次に、$n \ge 1$ なる各 n に対して、

$$\mathrm{Papl}_n(x, y_1, \cdots, y_n) = \begin{cases} \mathrm{Papl}(x, \langle y_1, \cdots, y_n\rangle), & \mathrm{PRF}(x) = n \text{ のとき}, \\ 0, & \text{そうでないとき}, \end{cases}$$

と定義すれば、$\mathrm{Papl}_n(x, y_1, \cdots, y_n)$ は、x が n 変数原始帰納的関数 f のゲーデル数のとき $f(y_1, \cdots, y_n)$ を値とし、そうでないとき 0 となる関数である。いま、$\mathrm{Papl}_1(x, y)$ が原始帰納的関数であると仮定すれば

$$f(x) = \mathrm{Papl}_1(x, x) + 1$$

も 1 変数原始帰納的関数である。そこで、$a = \ulcorner f \urcorner$ とすれば、Papl_1 の性質から

$$\mathrm{Papl}_1(a, y) = f(y)$$

したがって、

$$\mathrm{Papl}_1(a, y) = \mathrm{Papl}_1(y, y) + 1$$

ここで、y に a を代入すれば矛盾する。よって、Papl_1 は原始帰納的ではない。同様にして、各 $n \ge 1$ について Papl_n が原始帰納的ではないことが示される。すなわち次の定理を得る。

定理３　Papl および、Papl_n $(n = 1, 2, \cdots)$ は原始帰納的関数ではない。

系　$\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{M}$.