3　Ｔｕｒｉｎｇ 機械の定義

[I] 単純な仕掛けによって動作する仮想的な “機械” を想定し、それによって、自然数値関数を “計算” することを考える。

[II] 機械の構成と基本動作

- 機械はテープとヘッドからなる。詳しくは、
  - テープは左右に無限に長く、その上に無数の “こま” が並んでいる。
  - ひとつひとつの “こま” には**文字**が書き込まれている。
  - ヘッドはテープ上のひとつの “こま” に接触している。
- テープおよびヘッドは、後述する**指令**によって以下の 2 種の動作をする。
  - ヘッドは、左右どちらかにひとこま動く。これはテープがひとこま移動することと同じである。
  - ヘッドは、接触している “こま” に書かれた文字を読んだり書き換えたりする。

[III] 文字・内部状態・時点表示

- テープ上の “こま” に書かれる文字は、あらかじめ定められた 2 つ以上有限個、たとえば

  $$0 \quad 1 \quad * \quad \#$$

  の中から選ばれるとする。ここで 0 は空白を表し、とくに指定しない “こま” には 0 が書かれているものとする。
- 機械の**内部状態**を想定し、小文字のアルファベット

  $$a \quad b \quad c \quad \cdots$$

  で表す。内部状態は可算無限個取り得るとする。

- ある時点での機械全体の様子は、テープ上の文字列、ヘッドの位置、内部状態によって完全に定まる。いま、たとえば

テープ上の文字列	1 1 $\ast$ 1 1 1 0 # 1 $\ast$
ヘッドの位置	左から 3 番目の $\ast$ の書かれた "こま"
内部状態	a

であるとき、機械全体の様子を

$$1\ 1\ a \ast 1\ 1\ 1\ 0\ \#\ 1 \ast$$

によって表すことにする。このような表示を**時点表示**という。

[IV] 指令と動作

x, y を内部状態、 U, V を文字とするとき、

$$x\,\mathrm{U}\,\mathrm{V}\,y, \qquad x\,\mathrm{U}\,\mathrm{L}\,y, \qquad x\,\mathrm{U}\,\mathrm{R}\,y$$

をそれぞれ**書き換え指令**、**左移動指令**、**右移動指令**という。ここで、L、R はテープ上に書かれる文字とは異なるものとする。これらによって機械の動作が以下のように定義される:

> 内部状態が x で、ヘッドが接触している "こま" に書かれている文字が U であるとき、
>
> - 書き換え指令 $x\,\mathrm{U}\,\mathrm{V}\,y$ は、ヘッドの触れている "こま" を V に書き換え、内部状態を y に変える。
> - 左移動指令 $x\,\mathrm{U}\,\mathrm{L}\,y$ は、ヘッドを左にひとこま移動し、内部状態を y に変える。
> - 右移動指令 $x\,\mathrm{U}\,\mathrm{R}\,y$ は、ヘッドを右にひとこま移動し、内部状態を y に変える。

指令による時点表示の変化をまとめると次のようになる:

指　令	実　行　前		実　行　後
$x\,\mathrm{U}\,\mathrm{V}\,y$	$\cdots x\,\mathrm{U} \cdots$	$\longrightarrow$	$\cdots y\,\mathrm{V} \cdots$
$x\,\mathrm{U}\,\mathrm{L}\,y$	$\cdots \mathrm{U}' x\,\mathrm{U} \cdots$	$\longrightarrow$	$\cdots y\,\mathrm{U}'\mathrm{U} \cdots$
$x\,\mathrm{U}\,\mathrm{R}\,y$	$\cdots x\,\mathrm{U}\,\mathrm{V}' \cdots$	$\longrightarrow$	$\cdots \mathrm{U}\,y\,\mathrm{V}' \cdots$

内部状態が x でないか、または、ヘッドの読み取っている文字が U でないときは、これらの指令で時点表示は変化しないものとする。

[V] 機械の定義と動作例

- **機械**とは、最初の 2 文字が相異なる有限個の**指令**からなる集合のことである。
- 機械 Z と時点表示 T が与えられたとき、T を初期値とする **Z-計算**とは、時点表示の列

$$\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \cdots, \mathrm{T}_n$$

で、

  - ∘ $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0$.
  - ∘ 各 i $(0 < i \leq n)$ に対して、Z に属する指令が存在して、T_{i-1} にその指令をほどこすと T_i が得られる。
  - ∘ T_n は、Z に属するどの指令によっても変化しない。

なるものである。最後に得られた時点表示 T_n を、Z-計算の値といい $\mathrm{Z}\,(\mathrm{T})$ で表す。

- 例 1

$$\mathrm{Z} = \{a \ast \# \, b, \;\; b \, \# \, \mathrm{R} \, c, \;\; c \; 1 \; \mathrm{L} \; d\}$$
$$\mathrm{T} = 1 \; 1 \; a \ast 1 \; 1 \; 1 \; 0 \; 1 \; 1 \ast$$

であるとき、T を初期値とする Z-計算を求めよう: 初期値

$$\mathrm{T}_0 = 1 \; 1 \; a \ast 1 \; 1 \; 1 \; 0 \; 1 \; 1 \ast$$

は指令 $a \ast \# \, b$ によって

$$\mathrm{T}_1 = 1 \; 1 \; b \, \# \, 1 \; 1 \; 1 \; 0 \; 1 \; 1 \ast$$

に変化する。さらに、指令 $b \, \# \, \mathrm{R} \, c$ によって

$$\mathrm{T}_2 = 1 \; 1 \, \# \, c \; 1 \; 1 \; 1 \; 0 \; 1 \; 1 \ast$$

となり、指令 $c \; 1 \; \mathrm{L} \; d$ によって

$$\mathrm{T}_3 = 1 \; 1 \; d \, \# \, 1 \; 1 \; 1 \; 0 \; 1 \; 1 \ast$$

となる。Z が $d \, \#$ で始まる指令を含まないので Z-計算はここで停止し、

$$\mathrm{Z}\,(\mathrm{T}) = \mathrm{T}_3$$

となる。

- 例 2　　機械 Z を

$$\mathrm{Z} = \{a * \mathrm{R}\, a,\ \ a \# \mathrm{R}\, a,\ \ a\ 0\, \mathrm{R}\, a,\ \ a\ 1\ 1\ b\}$$

と定義すれば、時点表示

$$a * 0\ 0 \# * 1 *$$

に対して

$$\begin{aligned} & a * 0\ 0 \# * 1 * \\ \longrightarrow\ & * a\ 0\ 0 \# * 1 * \ \longrightarrow\ * 0\ a\ 0 \# * 1 * \\ \longrightarrow\ & * 0\ 0\ a \# * 1 * \ \longrightarrow\ * 0\ 0 \# a * 1 * \\ \longrightarrow\ & * 0\ 0 \# * a\ 1 * \ \longrightarrow\ * 0\ 0 \# * b\ 1 * \end{aligned}$$

となって終了する。
しかし、別の時点表示を初期値とすると、たとえば

$$\begin{aligned} & a * 0\ 0 \# \ \longrightarrow\ * a\ 0\ 0 \# \ \longrightarrow\ * 0\ a\ 0 \# \\ \longrightarrow\ & * 0\ 0\ a \# \ \longrightarrow\ * 0\ 0 \# a \ \longrightarrow\ * 0\ 0 \# 0\ a \\ \longrightarrow\ & * 0\ 0 \# 0\ 0\ a \ \longrightarrow\ * 0\ 0 \# 0\ 0\ 0\ a \ \longrightarrow\ \cdots \end{aligned}$$

のように操作は無限に続き、終了することがない。