# 「役に立つ数学・楽しい数学」講演資料：解答編

2015 年 10 月 30 日（金）　学習院大学 理学部 数学科 中島匠一

「問題編」で提示した問題の解答と、簡単な解説をまとめました。スペース節約のため、問題文は省略しています。「問題編」を参照してください。

$\boxed{\text{問題 1}}$（高さを測る）

（解答）水平な地面にスカイツリーに向かってメジャーを置き、メジャーの両端から「地面とスカイツリーのテッペンとの角度」を測ります。メジャーの（スカイツリーに向かって）手前の端からの角度を $\alpha$ とし、もう一つの端からの角度を $\beta$ とします（図 1 を参照)。このとき、スカイツリーの高さは

$$h = \frac{10\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha} \text{ メートル}$$

と計算できます。

（解説）解答での公式の証明を書いておきましょう。メジャーの長さを $l$ とし（この問題では、$l = 10$ メートル)、スカイツリーに近いほうのメジャーの先端からスカイツリーの真下の地面までの距離を $x$ とします。すると、tan の定義から

$$h = (l + x)\tan\alpha, \quad \text{および} \quad h = x\tan\beta$$

が成り立ちます。これを

$$l + x = \frac{h}{\tan\alpha}, \quad \text{および} \quad x = \frac{h}{\tan\beta}$$

と変形して、一番目の式から二番目の式を引けば

$$l = \left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}\right) h = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta} \times h$$

となります。これで、

$$h = \frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha} \times l$$

が得られます。今の場合は $l = 10$ メートルで、あとは測定した $\alpha, \beta$ を使って計算すれば、高さ $h$ が求まります。（注：通常は $\tan x$ の逆数 $1/\tan x$ のことを $\cot x$ と書きます（余接=cotangent）が、高校の教科書にでていないようなので、cot は使いませんでした。）

現実には、10m のメジャーの両端からの距離だけでスカイツリーの高さを測るのは無理かもしれません。理由は、「そのためには、$\alpha, \beta$ をものすごく正確に測らなくてはならない」からで、それができる測定器はないか、あったとしても簡単には入手できないでしょう。しかし、測定器の精度は「工学」の守備範囲で、「理論的には上の公式で高さが測れる」というのが「数学」の役割分担です。

$\boxed{\text{問題 2}}$（新聞紙と富士山）

（解答）答えは、26 回、です。（意外でしたか？）

（解説）新聞紙を一回二つ折りにすると厚さが 2 倍になるので、$n$ 回折れば厚さは $2^n$ 倍になります。したがって、問題で求められているものは

$$2^n \times (0.1\,\mathrm{mm}) > 3775.63\,\mathrm{m}$$

となる最小の自然数 $n$ です。この式を書き換えると

$$2^n > \frac{3775.63\,\mathrm{m}}{0.1\,\mathrm{mm}} = 37756300 = 3.77563 \times 10^7$$

となります（1m = 1000 mm に注意）。

この条件を満たす $n$ の求め方で一番素朴なのは、「次々に 2 を掛けて $2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, \cdots$ となる」という計算を値が 37756300 を超えるまで続けます。中学生はひたすらこの計算を実行して、正解を出したそうです（立派）。

対数を知っていて対数表が手元にあれば、計算は簡単です。上の不等式の両辺の常用対数（= 10 を底とする対数）をとれば、求める条件は

$$n \log_{10} 2 > \log_{10}(3.77563) + 7$$

となり、対数表で対数の値を求めて計算すると

$$n > \frac{\log_{10}(3.77563) + 7}{\log_{10} 2} = \frac{7.5769\cdots}{0.3010\cdots} = 25.1702\cdots$$

という値になります。この不等式を満たす最小の自然数は、$n = 26$ です。

2 のべきについて簡単な知識があると、暗算で「答えは 26 だろう」と見当をつけることができます。そのやり方を説明しましょう。コンピューターに詳しい方は、

$$2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$$

という事実をご存じかと思います（または、マージャンに詳しい方も；記号 $\approx$ は「値が近い」ことを表しています）。すると、両辺を 2 乗して

$$2^{20} \approx 10^6$$

となります。問題は、$2^n$ を $3.77563 \times 10^7 = 37.7563 \times 10^6$ より大きくすればよいので、上の事実と

$$2^5 = 32 < 37.7563 < 64 = 2^6$$

によって、求める値は $n = 20 + 6 = 26$ だろう、と推定できます。

$\boxed{\text{問題 3}}$（ナニワ金融道）

（答え）

(1) 毎年元金も返済しているので、2 年目以降は借りている金額が 100 万円より少なくなっています。それなのに、2 年目以降も 100 万円の分の利息を取るのはおかしいです。

(2) 問題文の通りの返済方法だと、利息は年利 $27.3198\cdots$ % です。

(3) 代表的な返済方法として、「元利均等返済」と「元金均等返済」があります。問題文のように「毎年同じ額を返す」というのが「元利均等返済」で、この方式だと「毎年 $23.8522\cdots$ 万円返済する」が正解です。この場合、返済総額は $23.8522\cdots \times 10 = 238.522\cdots$ 万円です。

また、「元金を返済年数で等分して、毎年、『その年の分の元金＋残っている元金の分の利息』を返済する」というのが「元金均等返済」です。こちらの方式だと、1 年目から 10 年目の返済額は、30 万円、28 万円、⋯、と毎年 2 万円ずつ減っていき、10 年目の返済額が 12 万円です。この場合は、返済総額は $30 + 28 + \cdots + 12 = 210$ 万円です。

（解説）

社会人として大過なく暮らしている人なら (1) には（何となく）答えられるでしょう。しかし、(2)(3) に数値で答えるには、数学の計算が必要です。その計算が自分でできる人は少ないかもしれないので、詳しく解説しましょう。

$\boxed{\text{問題 3}}$以外の状況でも計算ができるように、少し「一般論」で説明します。そのために、記号を定めましょう。お金を $M$ 円借りて、それを 1 年ごとに $N$ 年かけて返す契約で、利息は年利 $r$ とします。ただし、利息はパーセントではなく、比率そのものを表すとします（つまり、利息が $R$ %なら、$r = R/100$）。$\boxed{\text{問題 3}}$での町金の条件では、$M = 100$ 万$, N = 10, r = 0.2$ です。

まず、話が簡単な「元金均等返済」から考えましょう。$n$ を 1 から $N$ までの自然数として、$n$ 年目の返済額を計算します。$n$ 年目に残っている元金は $(N-n+1) \times (M/N) = M(N-n+1)/N$ 円で、その分の利息が $(M(N-n+1)/N) \times r = Mr(N-n+1)/N$ 円です。それに、$n$ 年目に返す分の元金 $M/N$ 円があるので、

$$n \text{ 年目の返済額 } = \frac{M}{N} + \frac{Mr(N-n+1)}{N} = \frac{M(1+(N-n+1)r)}{N} \text{ 円}$$

となります。返済総額は、上の金額を $n = 1, 2, \cdots, N$ について足せば、

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{M(1+(N-n+1)r)}{N} = M + \frac{Mr}{N} \sum_{n=1}^{N} (N-n+1) = M + \frac{Mr(N+1)}{2} \text{ 円}$$

となります。（ここで、高校で習う「等差数列の和の公式」を使っています；役に立つでしょう !?）
$\boxed{\text{問題 3}}$の設定の、$M = 100$ 万$, N = 10, r = 0.2$ を当てはめると、$n$ 年目の返済額が $32 - 2n$ 万円で、返済総額が 210 万円になります。

次に、元利均等返済について考えますが、これを扱うには少し「高度な思考」が必要になります。「高度な思考」というのは、「お金の価値は時間に依存する」と理解して、それを数値で表すことです。具体的には、「年利 $r$ %の世界」を想定するのがいいです。たとえば、今 $x$ 円持っていて、それを年利 $r$ %の預金口座に預けたとすると、1 年後には「元金＋利息」で、$x$ 円が $x + xr = x(1+r)$ 円になっています。だから、

$$\text{今の } x \text{ 円 } = \text{ 1 年後の } x(1+r) \text{ 円}$$

と考えられます。これを繰り返して、$n$ 年後を考えると

$$\text{今の } x \text{ 円 } = n \text{ 年後の } x(1+r)^n \text{ 円}$$

となります（$n$ は自然数）。ここで、上の考察を「ひっくり返して」捉えるのが面白いし、有効です。つまり、$y = x(1+r)^n$ とおくと $x = \dfrac{y}{(1+r)^n}$ なので、上の等式は

$$n \text{ 年後の } y \text{ 円 } = \text{ 今の } \frac{y}{(1+r)^n} \text{ 円}$$

と書き換えられます。この等式を利用すると、「$n$ 年後のお金の価値」を「現在の価値」に直すことができます。すると、「将来返すお金の現在の価値はいくらなのか？」と考えることができて、この考えが「元利均等返済」の計算に使えます。

記号 $M, N, r$ は上の通りとして、元利均等返済で毎年 $m$ 円を返済するとしましょう。このとき、上の公式から、「$n$ 年目に返す $m$ 円の『現在の価値』」は $\dfrac{m}{(1+r)^n}$ 円です。この値を $n = 1, 2, \cdots, N$ のすべてについて足せば、それは「$N$ 年間に返済するお金の「現在の価値」の総和」になります。しかし、借りたお金は $M$ 円なので（これは「今借りる」ので、「現在の価値」が $M$ 円)、この総和は $M$ に等しいはずです。これを式で表すと

$$M = \sum_{n=1}^{N} \frac{m}{(1+r)^n}$$

となります。ここで、高校で学ぶ「等比級数の和の公式」を思い出して適用する（＋簡単な式変形）と

$$M = \frac{m(1-(1+r)^{-N})}{r}$$

が得られます。最後に、これを

$$m = \frac{Mr}{(1-(1+r)^{-N})}$$

と書き換えれば、「元利均等返済での毎年の返済額」を求める公式が得られます。$m$ 円を $N$ 年間返済するので、この場合の返済総額は $Nm$ 円です。

この「公式」に $\boxed{\text{問題 3}}$ の設定の、$M = 100$ 万, $N = 10, r = 0.2$ を当てはめると、$m = 23.8522\cdots$ 万円となり、返済総額は $238.522\cdots$ 万円です。妥当な返済額は約 23 万 8522 円というわけで、町金の提示額の 30 万円とは大違いですね。さらに、上の公式に町金の条件である $M = 100$ 万, $N = 10, m = 30$ 万を代入した式から $r$ を求めると、$r = 0.273198\cdots$ という値が得られます。(ただし、$r$ の値の計算は大変で、計算機が必要です。)

$\boxed{\text{問題 4}}$(東北大地震)

(答え)

(1) マグニチュード 9.0 の地震はマグニチュード 7.0 の地震の 1000 倍のエネルギーを持っている。もっと具体的にいうと、あるビルにトラック 1 台が衝突したときの揺れがマグニチュード 7.0 に相当するとすれば、マグニチュード 9.0 の地震は、同じ大きさのトラック 1000 台が**同時に**ビルに衝突したときの揺れを引き起こす。

(2) 6.25 グラム

(解説)

(1)「地震のエネルギー」をどう定めるかは難しい問題かもしれませんが、具体的なことは地球物理学者に任せておきましょう。とりあえず、何らかのエネルギーによって地震の揺れが起きるはずだ、と考えておきましょう。さて、その(ある単位で測った)「地震のエネルギー」を $E$ とするとき、その地震のマグニチュード $M$ は

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

と表されるそうです。(4.8 とか 1.5 という数値には何らかの「根拠」があるはずですが、とりあえず、それは知らなくてもいいです。)対数関数の代わりに指数関数を使って表すと、

$$E = 10^{4.8} \times 10^{1.5M}$$

となるので、$M$ が 1 増えると、$E$ は $10^{1.5} = 10\sqrt{10} = 31.622\cdots$ 倍されます。しかし、この値はややこしいので、私は $M$ を 2 増やすことを基準にして考えています。つまり、$M$ が 2 増えると $E$ は $10^{1.5\times 2} = 10^3 = 1000$ 倍になる、というわけです。マグニチュード 7.0 はマグニチュード 5.0 の 1000 倍、マグニチュード 9.0 はマグニチュード 7.0 の 1000 倍(したがって、マグニチュード 5.0 の百万倍)、というわけです。「たった 2.0 の差」でも大違いですね。

(2) 放射性物質の量は「一定時間に一定の割合で減っていく」という物理法則があります。(「減る量が一定」なのでは **なく**、「減る割合が一定」であることに注意してください;法則に現れる「減る割合」が物質ごとに定まっているわけです。)なぜそんな法則が成り立つのか?、というのは「物理」に関わる疑問なので、物理の教科書を参照してください。ここでは、その法則は認めて、それを数学的にどう表すか、を解説します。

時刻 $t$ での放射性物質の量を $f(t)$ と表すことにします。すると、「法則」は「$f'(t) = -af(t)$ が成り立つ」と表現されます($f'(t)$ は $f(t)$ の導関数(=微分)で、$a$ は物質ごとに定まるある(正の)定数)。この微分方程式を解くと

$$f(t) = A\,e^{-at} \quad (A = f(0) \text{ は時刻 } t = 0 \text{ での物質の量})$$

と表せます（$e$ は自然対数の底)。しかし、これだと定数 $a$ の意味がはっきりわかりません。そこで、

$$T = \frac{\log 2}{a}$$

とおくと、上の式は

$$f(t) = A\,2^{-t/T}$$

と表されます。すると、$t$ が $t \to t + T$ と変化する（時間 $T$ が経過する）とき

$$f(t+T) = \frac{f(t)}{2}$$

が成り立つことがわかり、これが、$T$ の「意味」を表しています。つまり、「時間が $T$ だけ経過すると、物質の量が半分になる」というわけで、これが「半減期」の意味です（$T$ のことを、その物質の半減期、と呼ぶ)。

$\boxed{\text{問題 4}}$(2) では、$t$ が 0 から 32 日まで変化するわけです。そして、ヨウ素 131 について $T = 8$ 日であり、最初の物質の量は $A = f(0) = 100$ グラム、でした。したがって、

$$f(32\,\text{日}) = (100\,\text{グラム}) \times 2^{-(32\,\text{日}/8\,\text{日})} = (100\,\text{グラム}) \times 2^{-4} = \frac{100\,\text{グラム}}{16} = 6.25\,\text{グラム}$$

となり、これが答えです。

$\boxed{\text{問題 5}}$（ゲームの「値段」）

（答え）

(1) この問題の答えによって「性格診断」ができるかも !?

(2) 250 円が損得の境目となる。つまり、参加費が 250 円より安ければ参加する価値があるし、250 円を超えているなら損をすると考えられる。

（解説）

ゲームを 1 回だけおこなったとすると、1600 円もらえるかもしれないし、何ももらえないかもしれません。しかし、たとえば、このゲームを 1000 回おこなったときに賞金が $M$ 円得られたとしたら、このゲームの「価値」は $\frac{M}{1000}$ 円（くらい）だ、という判断は正しいと思いませんか？このように、(平均として) 期待できる値、のことを「期待値」と呼び、期待値を求めるための基礎に確率があります。(「確率」は高校の数学での重要テーマです；ただし、最近は期待値を学ばないことも増えているのが、残念。)

このゲームでの起こりうるすべての場合とその確率、および、賞金の期待値は下の表の通りです。

| コインの出方 | 賞金の額 | 確率 | (賞金) × (確率) |
|---|---|---|---|
| 表 | 100 円 | 1/2 | 50 円 |
| 裏・表 | 200 円 | 1/4 | 50 円 |
| 裏・裏・表 | 400 円 | 1/8 | 50 円 |
| 裏・裏・裏・表 | 800 円 | 1/16 | 50 円 |
| 裏・裏・裏・裏・表 | 1600 円 | 1/32 | 50 円 |
| 裏・裏・裏・裏・裏 | 0 円 | 1/32 | 0 円 |

この考察により、ゲームの賞金の期待値は

$$50\,\text{円} + 50\,\text{円} + 50\,\text{円} + 50\,\text{円} + 50\,\text{円} = 250\,\text{円}$$

となり、250 円がゲームの参加費の妥当な額だとわかります。

$\boxed{\text{問題 6}}$（宝くじ必勝法？）
（答え）

(1) 宝くじを買い占める（＝発行された宝くじをすべて購入する）ことです。

(2) 投入した費用の約半分を失います。

(3) 私には、とても当選するとは思えません。しかし、買った宝くじの番号が何であれ、それが当選する確率と 11 組 111111 番の宝くじが当選する確率は **同じ** であることに注意してください（それが、この問題の趣旨)。

（解説）
(1) 答えを見て怒らないでください。「必ず当選する」のは間違いないですよね。問題文が「一等に当選する」となっていて、「一等　だけ　に当選する」でないことに注意してください。私は「必ず一等だけに当選する方法」は思いつけません。
(2) 正確な資料を見ていないのですが、現在の日本のシステムでは、宝くじの収入の約半分が手数料などの「経費」になるそうです。これは、宝くじの賞金総額が、たとえば、15 億円であれば、宝くじを買い占めるには約 30 億円が必要になる、ということです。したがって、(1) の「作戦」を実行すれば、確実に損をします。
(3) 宝くじに期待を寄せる人は、当たるか当たらないか、という「2 分法」で考えていて、「当たる確率」と「当たらない確率」の対比を実感としてイメージできていないように思います。この問題は、その論点を（鋭く？）突いている、と言えるのではないでしょうか。

$\boxed{\text{問題 7}}$（秘密を守る）
（答え）
(1) 次の方式が 1 つの答えです。

(あ) 秘密のデータ（この場合は、暗証番号）を 1 つの実数 $a$ で表す。

(い) 平面上に、傾きが $a$ に等しい直線 $L$ を 1 つ選ぶ。

(う) 直線 $L$ 上に乗っている、異なる 3 点 $P, Q, R$ を選ぶ。

(え) 「$P$ の座標」、「$Q$ の座標」、「$R$ の座標」を別々にして、3ヶ所に保管する。

問題の条件を満たすことを確認しておきましょう。まず、3 点の情報を別々に保管しているので、(i) はみたされています。1 点の座標を知っただけでは直線 $L$ は定まらないので、(ii) もみたされています。平面上で、異なる 2 点を結ぶ直線はただ 1 つなので、$P, Q, R$ のうち 2 点の座標がわかれば $L$ が定まります。$L$ が定まれば $L$ の傾きがわかるので、(iii) もみたされています。
(2) いろいろな方法があり得ますが、「放物線を使う方法」と「円を使う方法」は高校生に理解できます。「放物線を使う方法」では放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ の係数 $a, b, c$（のどれか）をデータとし、$C$ 上の異なる 4 点を選んで、その座標を保管します。指定された 2 点を通る放物線は無限にありますが、3 点を通る放物線は 1 つに決まるので、目的が達成されます。また、「円を使う方法」では円の半径をデータにして、円上の 4 点を選んでその座標を保管します。この場合も、指定された 2 点を通る円は無限にありますが、3 点を通る円は 1 つに決まります（3 角形の外接円)。

$\boxed{\text{問題 8}}$（棒立て遊び）
（答えと解説）
棒が傾く様子を微分方程式を使って記述して、その方程式の解を調べて、「棒の立てやすさ」を考察します。実際の棒立てでは手が前後左右に動きますが、それを記述すると難しいので、棒の傾きだけを考える

ことにします。棒の重さが $m$ で、棒を支える点から棒の重心までの距離を $\ell$ とし、棒の垂直方向からの傾きの角度を $\theta(t)$ とします（図 2 参照）。ここで、$t$ は時間で、棒の傾きが時々刻々変化する様子が関数 $\theta(t)$ で表されるわけです。さらに、重力加速度を $g$ とする（地球上では、$g = 9.80665\mathrm{m/s^2}$ だそうです）と、棒の中心には垂直下向きに大きさ $mg$ の力がかかります。棒に添った方向の力は支点で支えられるので、棒に垂直な方向の力を考えます。すると、棒と垂直な方向の重力の成分は $mg\sin\theta(t)$ です（図 2 参照）。重心にかかる力のつり合いを考えると、ニュートンの力学の法則により

$$m\ell\theta''(t) = mg\sin\theta(t) - F(t) \tag{$*$}$$

が成り立ちます。ただし、$\theta''(t)$ は $\theta(t)$ を $t$ で 2 回微分したもの（2 階導関数）で、$F(t)$ は人間が棒に加える力を表しています。（人間は $\theta(t)$ を減らすように力を加えるので、$-F(t)$ と、マイナス符号をつけておくほうが便利。）この微分方程式 $(*)$ をみたす $\theta(t)$ について、値 $\theta(t)$ が小さい範囲に留まるように $F(t)$ をコントロールするのが人間の仕事で、それがうまい人が「棒立てマイスター」です（冗談ですよ）。

方程式 $(*)$ に現れる $\sin$ は実はなかなかの難物です。しかし、棒立ての目的は $\theta(t)$ を小さくすることですから、$\theta(t)$ が小さい場合に考察を限定して構いません。この場合（＝ $\theta(t)$ が小さい場合）には、$\sin\theta(t) \approx \theta(t)$ であることが知られています。（高校で学んだ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

という式を思い出してください；この式には重要な意味があるのですよ。）そこで、$(*)$ で $\sin\theta(t)$ を $\theta(t)$ で置き換えると

$$m\ell\theta''(t) = mg\theta(t) - F(t) \tag{$**$}$$

となって、「線形微分方程式」というものが得られます。確認しておくと、我々の問題は「方程式 $(**)$ をみたす $\theta(t)$ の値が小さくなるように $F(t)$ をコントロールせよ」ということです。この問題を考察するために、まず $F(t) = 0$ の場合を考えましょう（これは、人間は何もしない、ということです）。この場合には $(**)$ はすぐに解けます。具体的には、

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

とおくとき、解は

$$\theta(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2e^{-\lambda t} \quad (C_1, C_2 \text{ は } t = 0 \text{ のときの状態から定まる定数})$$

と表されます。棒立ての課題は「うまく $F(t)$ をコントロールして $\theta(t)$ を小さくすること」ですが、$F(t) = 0$ のとき（＝何もしないとき）の $\theta(t)$ の振る舞いによって、「立てやすさ」が変わってくるのは当然です。そして、それを調べれば、「箒は立てられるがボールペンは立てられない」ことの理由がわかります。

上の解には指数関数 $e^{\lambda t}$ が現れますが、これがカギを握っています。激しく増大することを「指数関数的に増大する」などと表現することがありますが、そのくらい、指数関数は「すぐに大きくなる」のです。そして、関数 $e^{\lambda t}$ の増大度には「$\lambda$ の大きさ」が関わってきます。つまり、

$$\lambda \text{ が大きい} \quad \Longrightarrow \quad t \text{ が増えるとき、} e^{\lambda t} \text{ は激しく増大する}$$

という関係があります。人間が何もしない場合（つまり、$F(t) = 0$ の場合）に $\theta(t)$ が激しく増大してしまうようだと、「$\theta(t)$ が小さくなるようにコントロールする」ことが難しくなるのは当然でしょう。ですから、「棒立ての難易度」は「$\lambda$ の大きさ」で決まるのです。

ここで上に書いた $\lambda$ の式を見てみると、長さ $\ell$ が分母にあることがわかります。したがって、$\ell$ が大きければ $\lambda$ は小さくなり、$\ell$ が小さければ $\lambda$ は大きくなります。しつこいですが、これをまとめると

$$\ell \text{ が大きい} \quad \Longrightarrow \quad \lambda \text{ が小さい} \quad \Longrightarrow \quad \text{棒立ては易しい}$$

となります。（もちろん、逆方向の、「$\ell$ が小さいなら棒立ては難しい」も成立します。）

結論として、「箒は立てられるがボールペンは立てられない」ということの理由は「箒は長く、ボールペンは短いから」となります。問題は「はじっこの形」とかではなく、「支点から重心までの距離」だったわけです。

上の解説は「重力加速度 $g$ は一定」という前提で話しています。もちろん、地球上では $g$ はほとんど一定でしょうから、これでいいと思います。しかし、「宇宙時代」ということで、宇宙まで考慮に入れれば話は変わってきます。たとえば、月面では重力は地球の 6 分の 1 だそうですから、月に行けばボールペンも立てられそうですね。

$\boxed{\text{問題 9}}$（伝言ゲーム）

（答え）

すべての文字を 3 回ずつ繰り返して伝言していけばいいです。「ミスは 1 回以下」という条件から、間違いが起こるとしても、それは 3 つのうち 1 つだけなので、あとの 2 つは正しいはずです。ですので、3 つの中で「多数決」をすれば、どれが正しい文字であるかがわかります。

たとえば「キ」という文字を伝えたければ、「キキキ」と伝言します。それが、途中でミスが起こって「キンキ」や「メキキ」となったとしても、「多数決」で伝言したかった文字が「キ」であることがわかります。

（解説）

上の方式を採用して、すべての文字を 3 回繰り返す、とすれば、「1 つのミス」に対する防御ができます。しかし、これだと、通信量が情報量の 3 倍、ということになって、非常に効率が悪いです。「そこが何とかならないか」という問題に、数学が活用されます。たとえば、ハミング符号というものが考えられていて（ハミングは人名）、7 ビットの通信量で 4 ビットの情報が送れて、しかも「1 つのミス」に対する防御ができます。これだと、通信量は情報量の $7/4 = 1.75$ 倍で済みます。さらに、「もっとよいシステムはないか」とか、「効率の向上に限界はあるか」などの問題は盛んに研究されていて、誤り訂正符号 (error correcting code) の理論、と呼ばれています。

$\boxed{\text{問題 10}}$（不思議な数）

（答え）

表の空白を埋めると、下のようになります。

| | |
|---|---|
| 1 倍 | 142857 |
| 2 倍 | 285714 |
| 3 倍 | 428571 |
| 4 倍 | 571428 |
| 5 倍 | 714285 |
| 6 倍 | 857142 |

この表を睨んでいると「数の並び方が皆同じ」であることに気付きます。142857 は直線上に並んでいるから分かりにくいですが、1 と 7 を隣り合わせにして円周上に数を並べてみれば、上の表の 6 つの数が「円周にいれる切れ目の箇所だけの違い」であることがわかります。

（解説）

問題の「不思議」を解明するためのヒントは、「表の次の行」を計算することです。つまり、$142857 \times 7$ を計算してください。あれ、あれ？、面白いことになりましたね。この「不思議な数」は「循環小数」というものから発生しています。

いまこのあたりのことを丁寧に説明する本を準備しているところです。興味のある方は、参照してみてください。

$\boxed{\text{問題 11}}$（掛け算 vs 因数分解）
（答え）
（初級問題）

(1) $17 \times 37 = 629$

(2) $713 = 23 \times 31$

（中級問題）

(1) $127 \times 137 = 17399$

(2) $16241 = 109 \times 149$

（解説）
この問題のキモは、「(1) は易しいが、(2) は難しい」というところにあります。言い換えれば、「積の計算は易しいが、因数分解を見つけるのは難しい」ということです。（この性質は、よく「行きはヨイヨイ、帰りはコワイ」と表現されます。）このことを応用すると、自分で $127 \times 137 = 17399$ という簡単な積の計算をしておいて、誰かに「17399 を因数分解し見て！」と問題を出せば、相手は困ってしまう、というイタズラができます。これをイタズラでなくマジメにやると「RSA 暗号」というものができます（RSA は 3 人の人名の頭文字)。「RSA 暗号」や、それより優れた性質を持っている「楕円曲線暗号」は現代の通信で重要な役割を果たしています。

$\boxed{\text{問題 12}}$（平方数の和）
（答え）
素数が 2 つの平方数の和になるかどうかは、「4 で割ったときの余り」で決まります。4 で割り切れる（つまり、余りが 0）素数はなく、余りが 2 の素数は 2 だけで、2 は 2 つの平方数の和です。2 以外の素数は全部奇数で、4 で割った余りは 1 か 3 です。そして、余りが 3 の素数は 2 つの平方数の和にはならず、余りが 1 の素数は必ず 2 つの平方数の和になることが証明されています。（きれいな定理でしょう。）
（解説）
平方数の和は、いろいろな事柄と関連していて、面白いです。素数に限らず、一般の自然数が 2 つの平方数の和になる条件も知られています。また、次の定理は面白いと思うのですが、余り知られていないようで残念です。

**ラグランジュの定理**　自然数は必ず 4 つの平方数の和として表される。

たとえば、$156 = 1^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2$ です（この例に特別な意味はありません)。また、$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$ ですが、7 は 3 つの平方数の和では表されないことがすぐにわかります。したがって、ラグランジュの定理の「4 つ」というのは「最低限必要な数」です。しかし、「4 つで済んでしまう」というのはスゴイ、と思いませんか？平方数の和の理論は、「2 次形式の理論」として発展し、多方面で利用されています。