

「役に立つ数学・楽しい数学」講演資料：問題編

2015年10月30日（金） 学習院大学 理学部 数学科 中島匠一

問題1（高さを測る）

スカイツリーや「池の向こうにある木」のように、てっぺんからヒモをつり下げることができないものの高さを測るにはどうしたらいいでしょうか？

あなたは、「長さ10 mが測れるメジャー」と「正確に角度が測れる器具」をもっているとします。それを使ってスカイツリーの高さを測る方法を述べてください。

問題2（新聞紙と富士山）

以前、私のゼミの学生が教育実習で中学生に次のような問題を出しました。下の3通りの要求に沿って、この問題に答えてください。

- (1) 直感だけに頼って、瞬時に答えてください。
- (2) 道具を使わず暗算だけで、数秒で答えてください。
- (3) 筆算をしてもよいですが、「絶対正しい」という答えを与えてください。

問題：新聞紙が一枚あり、ある人（多分、すごい巨人）がこれを次々に半分に折っていくとします。（つまり、一回折るごとに厚さが倍になり、面積が半分になるということです。）さて、折った新聞紙の厚さが富士山の高さを超えるためには、この人は何回紙を折ればいいでしょうか？ちなみに、新聞紙一枚の厚さは0.1 mmで、富士山の高さは3,775.63 mです。

問題3（ナニワ金融道）

この話は「ナニワ金融道」にでていた「返済額の計算法」です（ただし、数値は変えている）。年利20%の利息は高いようですが、これは「町金（まちきん）」としてはマイルドで、「ナニワ金融道」ではもっとすごい値が出てきます。（ちなみに、大手のクレジット会社でも、リボルビング払いの利率は年利14%くらいです。）あなたは、町金業者のトリックを見抜くことができますか？

あなたは

- (i) 100万円を借りて、10年で返済する。
- (ii) 返済は1年ごとにおこなう（つまり、年1回ずつ、10回に分けて返済する）。
- (iii) 利率は、年利20%とする。

という条件で借金することにしました。そして、この借金の返済法を、貸し手は次のように説明しました。

まず、年利20%で100万円貸すのだから、1年の利息は20万円です（ $100 \times 0.20 = 20$ ）。それと、元金の100万円は10年に分けて返してもらうので、1年ごとに返済する分は10万円です（ $100/10 = 10$ ）。

両方合わせて、10年間、毎年30万円を返済してください（ $20 + 10 = 30$ ）。

しかし、この返済法は「間違い」で、あなたは大損をしています。さて、ここで問題です。

- (1) 上の説明はどこがおかしいのでしょうか？
- (2) 上の説明通りに返済するとしたら、利息は年利何%になるのでしょうか。
- (3) 最初の(i)(ii)(iii)の条件に従って借金を返済する場合、正しくはどのように返済すべきでしょうか。

問題 4 (東北大地震)

3.11の大地震では、マグニチュードと半減期が話題になりました。あなたは、両者を正しく理解していますか？チェックのための問題です。

- (1) マグニチュード 7.0 の地震とマグニチュード 9.0 の地震はどのくらいの違いがあるのでしょうか。具体的に説明してください。
- (2) 放射性物質のヨウ素 131 の半減期は 8 日だそうです。さて、ある物質の中にヨウ素 131 が 100 グラム含まれていたとします。32 日経ったときに、その物質の中にヨウ素 131 は何グラム含まれているのでしょうか。

問題 5 (ゲームの「値段」)

1 枚のコインを(続けて)投げて、次のルールで賞金がもらえるゲームがあるとします。

- 1 回目で(いきなり)表がでる … 賞金は、100 円
- 2 回目で(始めて)表がでる … 賞金は、200 円
- 3 回目で(始めて)表がでる … 賞金は、400 円
- 4 回目で(始めて)表がでる … 賞金は、800 円
- 5 回目で(始めて)表がでる … 賞金は、1600 円
- 5 回とも全部裏がでる … 賞金は、0 円(ゲーム終了)

このゲームにタダで参加できるなら、参加したほうがトクです(少なくとも、損はしない)。しかし、世の中、そうは行きません。このゲームには「参加料」が必要です。あなたは、上のゲームの「参加料」がいくらだったら「ゲームに参加したい」と思いますか？

- (1) 「この値段なら参加する」という金額を、直感で答えてください。
- (2) 理屈に基づいて、妥当な金額を計算してください。

問題 6 (宝くじ必勝法?)

宝くじについて、あなたは「買う派」でしょうか、「買わない派」でしょうか。どちらであるにしても、次の問題の答えは知っておいたほうがいいと思います。

- (1) 宝くじには、「必ず一等に当選する方法」があります。それは何でしょうか。
- (2) (1)の方法に基づいて一等賞を当てた場合、あなたはどのくらいトクをする(=儲かる)でしょうか。
- (3) あなたの買ったくじの番号は 11 組 111111 番でした。あなたはこのくじが一等に当選すると思いますか？

問題 7 (秘密を守る)

あなたには「他人には絶対に知られてはならないが、20 年後に子孫(or 相続者)に伝えなければならない」重要な暗証番号があるとします。その暗証番号をどこかに保管するとして、1ヶ所だけに保管したのでは、地震などの災害が起きて保管場所が破壊されたら、番号が失われてしまいます。とって、暗証番号を何ヶ所にも保管すると、盗難に遭う可能性が高まって、「秘密にする」という目的から外れてしまいます。これらの「災害からの安全性」と「盗難からの安全性」の両方を確保するには、次の (i)(ii)(iii) が実現できれば「うれしい」でしょう。

- (i) 情報を 3ヶ所に分けて保管する。
- (ii) (3ヶ所のうち) 1ヶ所の情報を知っただけでは、暗証番号はわからない。
- (iii) 3ヶ所のうち、(どこでもいいから) 2ヶ所の情報を合わせれば、暗証番号がわかる。

なぜなら、(iii) があるので、3ヶ所のうち 1ヶ所が災害にあっても、あとの 2ヶ所があれば暗証番号はわかります(災害に対して安全)。また、(ii) があるので、3ヶ所のうち 1ヶ所が盗難にあっても、暗証番号が他人に知られることはありません(盗難に対して安全)。

こんな都合の良いことが実現できるのか?、と思うかもしれませんが、数学を応用すれば、可能です。さて、ここで問題です。

- (1) (i)(ii)(iii) を実現するためには、どうやったらよいでしょうか?
- (2) さらに安全性を高めるために、「情報を 4ヶ所に保管し、そのうち 3ヶ所の情報を合わせれば暗証番号がわかるが、2ヶ所の情報だけでは暗証番号はわからない」とできれば、さらに「うれしい」です。そのための方法を述べてください。

問題 8 (棒立て遊び)

小学校の掃除の時間に、(本来は掃除に使うために用意されている) 算(ほうき)を手の平の上に逆さに立てて遊んだことはありませんか?(あるでしょう。ないとは言わせませんよ。)ところで、算を立てることができたあなたも、ボールペンを指の上に立てておくことはできないのではないのでしょうか。(やってみてください; 美女による実演を予定しています。)さて、ここで問題です(また、かいな)。

問題: 算は立てられるのにボールペンは立てられないのはどうしてでしょうか。理由を説明してください。

問題 9 (伝言ゲーム)

何人かの人が集まって遊ぶ「伝言ゲーム」というものがあります。たとえば、10人のグループだとすると、10人が一列に並んで、最初の人が発した言葉を(バケツリレーのように)次々に隣の人に伝言して、最後の10人目の人に自分が聞いた伝言を話してもらうわけです。だいたい、途中で変な内容に変わってしまうのが面白い、というわけです。

遊びで行うゲームならば伝言が「変形」される方が面白いですが、「重要な情報を伝言で伝えよう」という場合には、ミスがあっては大変です。伝言による誤解を防ぐためには、途中でミスが起きたことがわかり、さらにそのミスを訂正できればベストです。さて、ここで問題です(そればっかしや)。

問題: 伝言の過程でのミスを発見し、それを訂正するにはどうしたらいいでしょうか。ただし、簡単のために、伝言の過程でおきるミスは1回以下であるとします。

問題 10 (不思議な数)

正の整数のことを自然数と呼びます。自然数 142857 は「不思議な性質」を持っています。何が不思議かって?それを理解するには、142857 を 2 倍、3 倍、... としてみてください。下の表に 2 倍まで計算しました。表の空白を埋めてから、表をじっと眺めて、「不思議」を発見してください。

1 倍	142857
2 倍	285714
3 倍	
4 倍	
5 倍	
6 倍	

問題 11 (掛け算 vs 因数分解)

中学生に戻っていただいて、整数の計算問題を解いてください。初級・中級のそれぞれで、2タイプの問題を出しておきます。どちらのタイプの問題のほうが難しいと思いますか？

(初級問題)

- (1) 自然数の積 17×37 を求めよ。
- (2) 自然数 713 を因数分解せよ (つまり、713 を $m \times n$ という形で表せ)。

(中級問題)

- (1) 自然数の積 127×137 を求めよ。
- (2) 自然数 16241 を因数分解せよ (つまり、16241 を $m \times n$ という形で表せ)。

問題 12 (平方数の和)

整数の2乗となる数を平方数 (square number または単に square) といいます。つまり、0, 1, 4, 9, 16, ... が平方数です。(注意: 0 を平方数に入れない流儀もありますので、本を読むときは注意してください。) 平方数自体に付いても面白いことがあります。平方数の和を考えると楽しいです。さて、下の表は、左の欄に 50 以下の素数を並べてあり、右の欄にその数が 2 つの平方数の和になるかどうかを書いてあります。(和になるものはその表し方が書いてあり、和にならないものは × が書いてある。) 実は、素数が 2 つの平方数の和になるかならないか、は簡単な条件で決まっています。その「条件」を探してください。

素数	平方数の和
2	$1^2 + 1^2$
3	×
5	$1^2 + 2^2$
7	×
11	×
13	$2^2 + 3^2$
17	$1^2 + 4^2$
19	×
23	×
29	$2^2 + 5^2$
31	×
37	$1^2 + 6^2$
41	$4^2 + 5^2$
43	×
47	×