ピタゴラス数と複素数平面

クルクル回ってどうすんの？

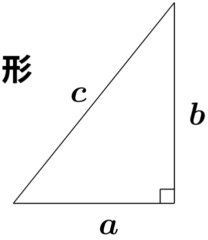
中野 伸

学習院大学・理学部・数学科

2019 年 8 月 2 日

直角三角形

直角三角形



といえば，思い浮かぶのは…，

三平方の定理　直角三角形の直角をはさむ２辺の長さを a, b，斜辺の長さを c とすれば

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ．

ピタゴラスの定理ともいう．

直角三角形の内角

直角三角形の（直角でない）内角ってどんなんだっけ？

- **直角二等辺三角形の場合；**

  辺の比 $1 : 1 : \sqrt{2}$ **内角** $45^\circ,\ 45^\circ$

- **正三角形の半分の場合；**

  辺の比 $1 : \sqrt{3} : 2$ **内角** $60^\circ,\ 30^\circ$

- **昔からよく知られているヤツの場合**

  辺の比 $3 : 4 : 5$ **内角** ？°, ？°

三番目の内角ってどうなってるの ?????

ピタゴラス数

どの辺の長さも <u>自然数</u> となる直角三角形を考える．

定義　方程式

$$x^2 + y^2 = z^2$$

をみたす自然数の組 (x, y, z) を**ピタゴラス数**という． さらに，x, y, z の最大公約数が 1 のとき，**原始的ピタゴラス数**という．

$(3, 4, 5)$，$(5, 12, 13)$，$(7, 24, 25)$，$(8, 15, 17)$ など$\cdots$，
多くの原始的ピタゴラス数が古代から知られている．

ピタゴラス数は無数にあるの？

- 一般に，
  ピタゴラス数 (A, B, C) の最大公約数を d とすると，
  $\left(\dfrac{A}{d}, \dfrac{B}{d}, \dfrac{C}{d}\right)$ は原始的ピタゴラス数になる．

- 逆に，
  すべてのピタゴラス数 (A, B, C) は，
  原始的ピタゴラス数 (a, b, c) と自然数 d によって，

  $$(A, B, C) = (ad, bd, cd)$$

  と表される．

- そこで，以下では，とくに原始的ピタゴラス数に注目する．

ピタゴラス数生成公式

次の定理（と同等の内容）は古代から知られていたらしい．

定理 1　偶奇の異なる互いに素な自然数 k, l $(k > l)$ について

$$x = k^2 - l^2, \quad y = 2kl, \quad z = k^2 + l^2$$

とおけば (x, y, z) は原始的ピタゴラス数である．
また，すべての原始的ピタゴラス数は，上のようにして（または x, y を取り換えて）得られる．

この定理から，原始的ピタゴラス数は無数にあることがわかる．

ピタゴラス数と単位円

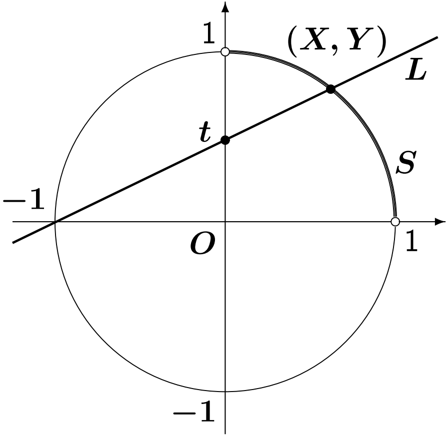
- XY-平面上，原点を中心とする半径 1 の円（単位円）は，方程式
$$X^2 + Y^2 = 1$$
で表される．

- 原始的ピタゴラス数 (x, y, z) から得られる XY 平面上の点 $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ は単位円上にある．

- より正確に，
「原始的ピタゴラス数」と「単位円上の第 1 象限の有理点」が 1 対 1 に対応する．

単位円と Y-軸

- 「単位円上の第 1 象限の点」は，
「Y-軸上の点 $(0, t)$，$0 < t < 1$」と 1 対 1 に対応する．



ピタゴラス数 ⇔ 単位円 ⇔ 有理数

- 直線 L と単位円の方程式 $Y = tX + t$，$X^2 + Y^2 = 1$ と連立させて整理すると，

$$X = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad Y = \frac{2t}{1+t^2}$$

- t に有理数を代入，$t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ から単位円上の有理点

$$(X, Y) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \quad \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right), \quad \left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right), \ldots$$

さらに，原始的ピタゴラス数

$$(x, y, z) = (3, 4, 5), \quad (5, 12, 13), \quad (15, 8, 17), \ldots$$

が次々に得られる．

複素数平面上の単位円

- 単位円を複素数平面上で考えると，

$$S = \{\, z \mid z \text{ は } |z| = 1 \text{ をみたす複素数} \,\}$$

- 複素数は，積＝掛け算ができる．
単位円上の２つの複素数 α, β の積は，ふたたび単位円上にある．つまり

$$|\alpha| = |\beta| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |\alpha\beta| = 1$$

あたりまえだ！ヽ(｀Д´#)ノ

複素数平面上の単位円

- 「原始的ピタゴラス数」と「単位円上の複素数」との対応に掛け算を絡ませる；

ピタゴラス数	→	複素数の積	→	新しいピタゴラス数

$$\begin{array}{ccc} (a_1, b_1, c_1) & \longrightarrow & z_1 \\ (a_2, b_2, c_2) & \longrightarrow & z_2 \end{array} \Bigg\} \xrightarrow{\text{積}} z_1 z_2 \longrightarrow (d, e, f)$$

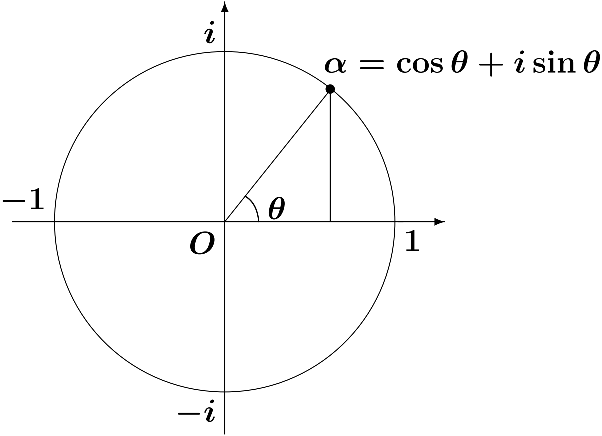
- たとえば，$(3, 4, 5)$，$(5, 12, 13)$ に対応する単位円上の複素数を，掛け合わせる

$$\frac{3+4i}{5} \cdot \frac{5+12i}{13} = \frac{-33+56i}{65}$$

新しいピタゴラス数 $(-33, 56, 65)$ が得られる．

～ ピタゴラス数の範囲を少しだけ広げちゃいました ～

単位円上の複素数を角度で表す.



単位円上の掛け算～クルクル回るよ～

単位円上の２つの複素数を角度で表す；

$$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$\beta = \cos\phi + i\sin\phi$$

掛け合わせると

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi)\\ &= (\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)\end{aligned}$$

三角関数の加法定理を使って

$$\alpha\beta = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)$$

単位円上の掛け算〜クルクル回るよ〜

- とくに，$\alpha = \beta = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき

$$\alpha^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

- 一般に，すべての整数 n に対して，

$$\alpha^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

これは**ド・モアブルの公式**と呼ばれる．

定義　n を自然数とするとき，
$\alpha^n = 1$ となる複素数 α を**１の n 乗根**という．
これらを総称して，**１のべき根**という．

１のべき根は，すべて**単位円**上にある．

ド・モアブルの公式から次の定理が導かれる；

定理２　**単位円**上の複素数 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ が１のべき根であるためには，θ が **有理数°** であることが必要十分である．

“**有理数°**” というのを “**π の有理数倍ラジアン**” と言い換えても同じ．

ピタゴラス数の “角度” はどうよ？

最初の問題

ピタゴラス数から作られる直角三角形の（直角でない）内角って
どんな角度なの？
30°, 45°, $60^\circ, \ldots$　みたいに，わかりやすい角度かな？

実は，次の定理が成り立つ．

定理 3　ピタゴラス数 (x, y, z) に対して，

$$\alpha = \frac{x + iy}{z}$$

と定めると，α は 1 のべき根ではない． とくに，x, y, z を辺の長さとする直角三角形の（直角でない）内角は **無理数°** である（つまり π **の無理数倍ラジアン**である）．