2021年度
学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
（春季募集）

入学試験問題
数　学

2021年2月17日

次の問題のうち，$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ には必ず答えなさい．さらに，$\boxed{\mathbf{3}}, \cdots, \boxed{\mathbf{9}}$ から２問選択し，計４問について解答しなさい．

以下では，$\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ はそれぞれ整数全体の集合，有理数全体の集合，実数全体の集合，複素数全体の集合を表すこととする．

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\mathbf{C}^3$ を標準的なエルミート内積の下で計量ベクトル空間とみなし，そのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) グラム・シュミットの直交化法によって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ から正規直交関係を満たすベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を求めよ．

(2) 前問で求めたベクトルを列ベクトルとする行列を $U = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)$ とするとき，逆行列 U^{-1} を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ α を実数とするとき、広義積分

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{(\log x)^\alpha} dx$$

が収束するための α の条件を求めよ． 収束と発散の証明もすること．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\mathbf{R}$ 上 2 次正則行列全体のなす乗法群の部分群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, d \in \mathbf{R},\ ad \neq 0 \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbf{R} \right\}$$

について，以下の各命題を証明せよ．

(1) H は，加法群 $\mathbf{R}$ と同型である．

(2) H は，G の正規部分群である．

(3) 商群 G/H は，直積群 $\mathbf{R}^\times \times \mathbf{R}^\times$ と同型である．ただし，$\mathbf{R}^\times = \mathbf{R} \setminus \{0\}$（体 $\mathbf{R}$ の乗法群）とする．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $\zeta \in \mathbf{C}$ を 1 の原始 3 乗根とし，$K = \mathbf{Q}(\zeta)$ とおく． L/K を 3 次巡回拡大とし，ガロア群の生成元を σ とする． $\beta \in L$ に対して，

$$\alpha = \beta + \zeta^2\sigma(\beta) + \zeta\sigma^2(\beta)$$

とおくとき，以下の問に答えよ．

(1) $\sigma(\alpha) = \zeta\alpha$ が成り立つことを示せ．

(2) $\alpha^3 \in K$ であることを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 複素積分を用いて，次の広義積分を計算せよ．

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ $y = y(x)$ に関する，次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y' + y = (e^{2x} + 3)y^3$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ $f(x)$ を有界な台を持つ $\mathbf{R}$ 上のルベーグ可測な複素数値可積分関数とする． このとき，

$$g(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{izx} f(x) dx \quad (z \in \mathbf{C})$$

は複素平面上で正則な関数を定めることを証明せよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上に定義された微分形式

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $d\omega = 0$ を示せ．

(2) 反時計回りの単位円周を C とする． このとき，線積分

$$\int_C w$$

の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ X を無限集合として，$x \in X$ を固定する． このとき，X の部分集合族を

$$\mathcal{T} = \{A \subset X \mid x \notin A \text{ または } X \setminus A \text{ は有限集合}\}$$

とする． 以下の問いに答えよ．

(1) $\mathcal{T}$ は開集合系の公理を満たす (X の位相を定める) ことを示せ．

(2) $\mathcal{T}$ の定める位相について，X はコンパクトであることを示せ．