2022年度
学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
（夏季募集）

入学試験問題
数　学

2021年7月3日

次の問題のうち，$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ には必ず答えなさい．さらに，$\boxed{\mathbf{3}}, \ldots, \boxed{\mathbf{9}}$ から2問選択し，計4問について解答しなさい．

以下では，$\mathbf{Z}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ はそれぞれ整数全体の集合，実数全体の集合，複素数全体の集合を表すこととする．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の (1), (2) 両方に答えよ．

(1) 行列 A を $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ とする．自然数 n について，A^n を求めよ．

(2) 実3次元線形空間 $\mathbf{R}^3$ 内の3つの平面

$$H_1 : -x+y+z=1, \quad H_2 : x+y-z=1, \quad H_3 : x-y+z=1$$

があたえられたとき、3次元正方行列 B で定まる線形変換

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$$

は、H_1 を H_2 に、H_2 を H_3 に、H_3 を H_1 にそれぞれ移す．行列 B を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の (1), (2) 両方に答えよ．

(1) 以下の広義積分が、収束するか否かを決定し、収束する場合はその値を求めよ：

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx.$$

(2) $f(x)$ を、$\mathbf{R}$ 上の閉区間 $[a,b]$ 上で連続で、開区間 (a,b) 上で微分可能な実数値関数とする． $\alpha < \beta$ をみたす (a,b) の元 α, β に対して、$f'(\alpha) < k < f'(\beta)$ とすると、$f'(c) = k$ をみたす (α, β) の元 c が存在することを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 群 G の正規部分群 N_1, N_2 で，条件

(A) G/N_1，G/N_2 は両方ともアーベル群である．

(B) $N_1 \cap N_2 = \{e\}$ である（ただし，e は G の単位元である）．

をみたすものが存在すれば，G はアーベル群であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ p を素数とする． 整数 $n > 0$ に対して，$\boldsymbol{C}$ の部分環

$$R_n = \left\{ a + b\sqrt{-n} \,\middle|\, a, b \in \boldsymbol{Z} \right\}$$

を考える．

(1) $p^2 < n$ ならば，p は R_n の既約元であることを示せ．

(2) p が奇素数で，$-n$ が p を法として平方剰余であるとき，p は R_n の素元ではないことを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f_n(x)$ を $\mathbf{R}$ 上の連続関数の列とする。このとき、

$$g(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

と定義すると、$g(x)$ はルベーグ可測関数であることを、ルベーグ可測性の定義から導け．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $y' = \dfrac{dy(x)}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y(x)}{dx^2}$, $y''' = \dfrac{d^3y(x)}{dx^3}$ と表したとき、実数値関数 $y = y(x)$ に関する以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0.$

(2) $y'' - 2y - 2(e^{-\sqrt{2}x} + 1)^{-2} = 0.$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 複素関数 $f(z) = e^z \sin z$ の $z = 0$ におけるべき級数展開を求めよ.

(2) n を自然数とする. $\gamma = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ を複素平面上の単位円として、

$$\int_\gamma \frac{e^z \sin z}{z^n}\, dz$$

を求めよ.

$\boxed{\mathbf{8}}$ 実数を成分にもつ 2×2 対称行列全体からなる集合を $S(2, \mathbf{R})$ とする. その部分集合

$$K = \{X \in S(2, \mathbf{R}) \mid \det X = 2\}$$

とおく.

(1) K が多様体であることを示せ.

(2) K の元 X に対し、写像 $\phi : K \to K$ を

$$\phi : X \mapsto \frac{1}{2} X^2$$

で定義する. K の元 P を $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき、接空間 $T_P K$ および $T_{\phi(P)} K$ にそれぞれ基底を定めて、微分写像

$$(D\phi)_P : T_P K \to T_{\phi(P)} K$$

を行列の形で示せ.

$\boxed{\mathbf{9}}$ $f(x, y) = e^{x^2 - y^2} xy$ とするとき、以下の問いに答えよ.

(1) $z = f(x, y)$ のグラフ上の点 $(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}e)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) $(x, y) = (1, 1)$ を基点として、$f(x, y)$ を近似する 2 次のテイラー多項式 $P(x, y)$ を求めよ.