2025年度
学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
（夏季募集）

入学試験問題
数　学

2024年7月6日

次の問題のうち，$\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$ には必ず答えなさい．さらに，$\boxed{\mathbf{3}}, \ldots, \boxed{\mathbf{8}}$ から 2 問選択し，計 4 問について解答しなさい．

以下では，$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ はそれぞれ整数全体，有理数全体，実数全体の集合を表すこととする．

$\boxed{1}$ 以下の問に答えよ．

(1) 実数 a に対して，4 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 & a \\ 1 & -1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a-1 \\ a & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

と定める．A が正則とならない a の値をすべて求めよ．

(2) 複素数 k に対して，3 次正方行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

と定める．

(2-1) B が対角化不可能であるような k の値をすべて求めよ．

(2-2) B が対角化不可能であるようなそれぞれの k の値に対して，B のジョルダン標準形を求めよ．ただし，$P^{-1}BP$ がジョルダン標準形となるような正則行列 P を求める必要はない．

$\boxed{2}$ 以下の問に答えよ.

(1) べき級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+2}$$

の収束半径を求めよ.

(2) 次の等式が成り立つ定数 a を求めよ.

$$\int_0^1 (x-a)\mathrm{Arctan}\, x \, dx = 0$$

(3) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^6 - x^3 y, \\ \varphi(x,y) &= 2x^4 - 2xy + y^2 \end{aligned}$$

を考える.

(3-1) 条件 $\varphi(x,y) = 0$ の下での関数 $f(x,y)$ の停留点をすべて求めよ.

(3-2) 条件 $\varphi(x,y) = 0$ の下で関数 $f(x,y)$ の極値を与える点のうち, 原点以外のものをすべて求めよ.

$\boxed{3}$ kを体とするとき，0 でないkの元全体からなる乗法群を$k^\times$で表す．2 以上の自然数pに対して，$\mathbb{Q}^\times$の部分集合

$$G_p = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\quad a \not\equiv 0 \pmod{p},\quad b \not\equiv 0 \pmod{p} \right\},$$
$$H_p = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\quad a \equiv b \not\equiv 0 \pmod{p} \right\}$$

を考える．

(1) G_p が $\mathbb{Q}^\times$ の部分群であるためには，p が素数であることが必要十分であることを示せ．

(2) $\sigma : \mathbb{Q}^\times \to \mathbb{Q}^\times/G_p$ を自然な全射とする．p が素数のとき，剰余群 $\mathbb{Q}^\times/G_p$ は $\sigma(p)$ を生成元とする無限巡回群であることを示せ．

(3) p が素数のとき，剰余群 G_p/H_p は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ と同型であることを示せ．ただし，H_p が G_p の部分群であることは認めてよい．

$\boxed{4}$ aを実数とし，商環

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{R}[x, y]/(xy - 1), \\ B_a &= \mathbb{R}[x, y, z]/\big(z - (x^2 - y^2), z - (ax + 2y - 3)\big) \end{aligned}$$

を考える．

(1) Aは整域であることを示せ．

(2) B_4が整域でないことを示せ．さらに，B_4の零因子を一つ求めよ．

(3) B_aが整域となるためのaの条件を求めよ．さらに，B_aが整域ならば，Aに同型であることを示せ．

$\boxed{5}$　実数値関数 $y = y(x)$ に対して，

$$y' = \frac{dy(x)}{dx},\ y'' = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$$

と表したとき，y に関する以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y'' - 5y' + 6y = 0$

(2) $y'' - 2y' - e^x \sin x = 0$

$\boxed{6}$　測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上で定義された実数値可測関数 f, g と可測集合 $A \in \mathcal{F}$ について，

$$\int_A |f(x) - g(x)| \mu(dx) = 0$$

ならば，集合 A 上ほとんどいたるところ $f = g$ であることを示せ．

$\boxed{7}$　$\mathbb{R}$ に通常の位相を入れて，$\mathbb{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を，$x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ x - y \in \mathbb{Q}$$

として定める．$X = \mathbb{R}/\!\sim$ をこの同値関係による商空間とする．

(1) X はハウスドルフ空間かどうか，理由とともに答えよ．

(2) X はコンパクトであるかどうか，理由とともに答えよ．

$\boxed{8}$ 関数

$$F(x,y,z) = 18(x^2+y^2) - (z^2+2)^2$$

によって曲面 S を

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\right\}$$

と定め，S 上の点 $p = (1,1,2)$ をとる．

(1) 点 p における S の接平面 H_p の方程式を求めよ．

(2) 可微分写像 $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$G(x,y,z) = \left(\frac{2y}{1+z^2}, \frac{2x}{1+z^2}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+z^2}}\right)$$

によって定め，写像 G の S への制限を g と表す．g は写像 $g : S \to S$ を定めることを示せ．

(3) 点 p における S の接空間を T_pS と表す．T_pS を接平面 H_p と同一視して，接空間 T_pS の基底を 2 つの接ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \left(1, 0, \frac{3}{4}\right),\ \boldsymbol{e}_2 = \left(0, 1, \frac{3}{4}\right)$$

によって与える．(2) の写像 g によって $q = g(1,1,2)$ と定め，点 q における接空間 T_qS についても T_pS と同様にして

$$\boldsymbol{f}_1 = \left(1, 0, \frac{3\sqrt{10}}{4}\right),\ \boldsymbol{f}_2 = \left(0, 1, \frac{3\sqrt{10}}{4}\right)$$

によって基底を与える．このとき g の微分写像 $(dg)_p : T_pS \to T_qS$ について，$(dg)_p(\boldsymbol{e}_1)$，$(dg)_p(\boldsymbol{e}_2)$ をそれぞれ $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ を用いて表せ．