

2025年度
学習院大学大学院

自然科学研究科 博士前期課程 数学専攻
(春季募集)

入学試験問題

数 学

2025年2月17日

次の問題のうち，**1**，**2** には必ず答えなさい． さらに，**3**， $\dots$ ，**8** から2問選択し， 計4問について解答しなさい．

以下では， $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数全体の集合，有理数全体の集合，実数全体の集合，複素数全体の集合を表すこととする．

1

(1) a を実数とし，行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ a+1 & 2a+1 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を考える．線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を， $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ に対して $f(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ と置くことで定める． $f^{-1}(\mathbf{o})$ ($\mathbf{o}$ はゼロベクトル) が $\mathbb{R}^4$ の2次元部分ベクトル空間となるときの， a の値および f の像 $f(\mathbb{R}^4)$ の基底を一組求めよ．

(2) V を2次以下の複素数係数多項式全体からなる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする：

$$V = \{ a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{C} \}.$$

$k \in \mathbb{C}$ に対して，線形変換 $\Gamma_k: V \rightarrow V$ を

$$\Gamma_k(f(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + kf(x+1) \quad (f(x) \in V)$$

で定める．

(2-1) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する Γ_k の表現行列 A_k を求めよ．

(2-2) Γ_k のジョルダン標準形及びそれを与える V の基底を求めよ．

2

(1) x, y, z を実数とする. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の条件のもとで, $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - z^3$ の停留値 (臨界値) をすべて求めよ.

(2)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-x^2-y^2} dx dy$$

を計算せよ.

3 整数 a に対して,

$$f(X) = X^3 + 3aX^2 + 3a^2X + 1$$

とおき, 剰余環 $R = \mathbb{Q}[X]/(f(X))$ を考える. ただし, $\mathbb{Q}[X]$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の多項式環であり, $(f(X))$ は $f(X)$ が生成する $\mathbb{Q}[X]$ のイデアルを表す.

(1) R が体とならないような a をすべて求めよ.

(2) X が定める R の元を x とする ($x = X \bmod (f(X))$). R が体であるとき,

$$\frac{1}{x+1} = ux^2 + vx + w$$

をみたす u, v, w を a を用いて表せ.

4 G を群とし, H を G の (正規とは限らない) 部分群とする. $G \rightarrow G/H, g \mapsto \bar{g} = gH$ を自然な全射とする. いま, $x \in G$ に対して, 写像

$$\pi_x : G/H \rightarrow G/H$$

を, $\pi_x(\bar{g}) = \overline{xg}$ ($g \in G$) によって定めたい.

(1) すべての $x \in G$ について, π_x は well-defined であることを示し, さらに全単射であることを示せ.

(2) G/H からそれ自身への全単射全体の作る (写像の合成を演算とする) 群を S とするとき, $f(x) = \pi_x$ によって定義される写像

$$f : G \rightarrow S$$

は準同型写像であることを示せ.

(3) f を前問で定めた準同型写像とする. H が G の正規部分群であるためには, $\text{Ker } f = H$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

5

(1) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \cos y$$

の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 3x$$

の解で, 初期条件 $y(1) = 0$ を満たすものを求めよ.

6 $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ を測度空間, $f, f_n (n \geq 1)$ を可測関数とする.

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_X |f(x)| \mu(dx) \geq \varepsilon \cdot \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\})$$

が成り立つことを示せ.

(2) $0 < p < \infty$ とするとき

$$\int_X |f_n(x) - f(x)|^p \mu(dx) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことを示せ.

7 複素数平面上の曲線 C に沿った複素積分を

$$I_C = \int_C z \sqrt{z\bar{z} + 1} dz$$

とする.

- (1) 0 を始点として $1+i$ を終点とする線分を C_1 とする. 積分 I_{C_1} を求めよ.
- (2) 0 を始点として実軸に沿って $\sqrt{2}$ へ移動し, その後円周 $|z| = \sqrt{2}$ 上を正の向きに移動して $1+i$ に至る曲線を C_2 とする. このとき, 積分 I_{C_2} の値を求めよ.
- (3) C_2 と, C_1 を逆向きに移動する線分をつないで出来る閉曲線を C_3 とする. I_{C_3} を Green の定理を用いて重積分で表し計算せよ.

8 (X, d) を距離空間とする.

- (1) $F \subset X$ を閉集合とし, $x \notin F$ とする.

(1-1) $\inf_{y \in F} d(x, y) > 0$ であることを示せ.

(1-2) さらに F がコンパクトならば, $d(x, z) = \inf_{y \in F} d(x, y)$ となる点 $z \in F$ が存在することを示せ.

- (2) F_1, F_2 を X の閉集合で, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ とする. このとき,

$$\inf_{x \in F_1, y \in F_2} d(x, y) > 0$$

は常に成り立つか? 正しければ証明を与え, 正しくなければ反例を与えよ.